ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

FONDÉES EN 1921 PAR STANISŁAW ZAREMBA

TOME XIX

ANNÉE 1946

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA OŚWIATY

KRAKÓW 1947
INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
UL. ŚW. JANA 22

Avis

Les tomes des Annales de la Société Polonaise de Mathématique paraissent en un ou en deux fascicules par an. Les manuscrits doivent être envoyés à l'une des adresses:

F. Leja, Kraków (Pologne), ul. Łobzowska 61.
T. Ważewski, Kraków (Pologne), ul. Starowiślna 77.
S. Gołąb, Kraków (Pologne), ul. Łobzowska 61.

Les auteurs ont le droit à 50 tirages à part gratuitement.
Pour ce qui concerne l'achat et l'échange de ces Annales s'adresser à:

Administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique
Kraków (Pologne), ul. św. Jana 22.

Table des matières

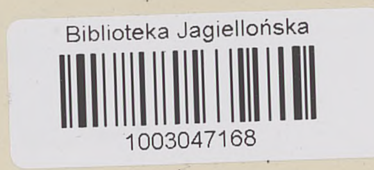
ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

FONDÉES EN 1921 PAR STANISŁAW ZAREMBA

TOME XIX

ANNÉE 1946



KRAKÓW 1947
INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
UL. ŚW. JANA 22



PRINTED IN POLAND

Reproprodukcja fotooffsetowa 1958.
Zakł. Graf. RSW „Prasa" Wrocław.

SUR LES POLYNOMES DE TCHEBYCHEFF ET LA FONCTION DE GREEN

Par F. Leja, Kraków[1])

1. Soit E un ensemble fermé et borné des points du plan et

$$(1) \qquad T_n(z; E), \qquad n=1,2,...$$

le n-ième polynome de Tchebycheff attaché à E, c'est-à-dire celui des polynomes de la forme $P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ pour lequel on a, quel que soit $P_n(z)$, l'inégalité:

$$\max_{(E)} |T_n(z; E)| \leqslant \max_{(E)} |P_n(z)|.$$

Désignons par $D(E)$ celui des domaines complémentaires à E (s'il y en a plusieurs) qui contient le point $z=\infty$ dans son intérieur et par F la frontière de $D(E)$. Il est clair que F fait partie de E et qu'on a (en vertu du principe de maximum)

$$T_n(z; F) \equiv T_n(z; E), \qquad n=1,2,...$$

Le but de ce travail est de prouver que, si le diamètre transfini de l'ensemble E est positif, la suite

$$\frac{1}{n}\log|T_n(z; E)|, \qquad n=1,2,...,$$

tend dans le domaine $D(E)$ vers une limite intimément liée avec la fonction de Green de ce domaine ayant son pôle à l'infini.

2. Désignons par R_n le maximum du module du polynome $T_n(z; E)$ dans l'ensemble E et soit $\{\zeta_0, \zeta_1, ..., \zeta_n\} = \zeta$ un système

---

[1]) Ce travail a été l'objet de ma conférence faite à l'Institut H. Poincaré à Paris le 14. VI. 1939.

de $n+1$ points quelconques de E. Formons les produits

$$V_n(\zeta)=\prod_{0\leqslant l<k\leqslant n}|\zeta_l-\zeta_k|,\quad \Delta_0^{(j)}(\zeta)=\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}(\zeta_j-\zeta_k),\qquad j=0,1,\ldots,n,$$

et soit V_n la valeur maxima du produit $V_n(\zeta)$ lorsque les points $\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ varient arbitrairement dans E.

L'ensemble E étant fermé la valeur V_n est atteinte dans E, c'est-à-dire il existe un système de $n+1$ points de E, soit

(2) $$\{\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_n\}=\eta,$$

pour lesquels $V_n(\eta)=V_n$[2]. Supposons que les indices des points (2) soient choisis de manière que parmi les produits $|\Delta_n^{(0)}(\eta)|$, $|\Delta_n^{(1)}(\eta)|,\ldots$, $|\Delta_n^{(n)}(\eta)|$ le premier soit le plus petit

(3) $$|\Delta_n^{(0)}(\eta)|\leqslant|\Delta_n^{(j)}(\eta)|\qquad \text{pour } j=1,2,\ldots,n.$$

Ceci posé, formons les $n+1$ polynomes de LAGRANGE

(4) $$L_n^{(j)}(z;\eta)=\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}\frac{z-\eta_k}{\eta_j-\eta_k},\qquad j=0,1,\ldots,n,$$

correspondants aux points (2) et considérons la suite

(5) $$\sqrt[n]{|L_n^{(0)}(z;\eta)|},\qquad n=1,2,\ldots$$

On sait[3] que les deux suites $\{\sqrt[n]{R_n}\}$ et $\{\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{V_n}\}$ convergent vers une même limite, dite le diamètre transfini de l'ensemble E, qui sera désigné par $d(E)$. Puisque $[V_n(\eta)]^2=\prod_{j=0}^{n}|\Delta_n^{(j)}(\eta)|\geqslant|\Delta_n^{(0)}(\eta)|^{n+1}$ et que $|\Delta_n^{(0)}(\eta)|=\max_{(z\in E)}|(z-\eta_1)\ldots(z-\eta_n)|\geqslant R_n$ on a

$$\sqrt[n]{R_n}\leqslant|\Delta_n^{(0)}(\eta)|^{1/n}\leqslant\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{V_n},\qquad \text{pour } n=1,2,\ldots$$

donc la suite $\{|\Delta_n^{(0)}(\eta)|^{1/n}\}$ converge aussi vers $d(E)\geqslant 0$.

---

[2]) Il serait plus naturel de désigner les points (2) par $\eta_0^{(n)},\eta_1^{(n)},\ldots,\eta_n^{(n)}$ car leur position dans E dépend de n. Je les ai désignés plus brièvement pour simplifier l'écriture.

[3]) M. Fekete: Math. Zeitschrift, t. 17 (1923), p. 228—49.

J'aurai à m'appuyer dans la suite sur les résultats suivants [4]):

Si le diamètre transfini $d(E)$ est positif la suite (5) *converge dans le domaine $D(E)$ vers une fonction limite*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|L_n^{(0)}(z;\eta)|} = L(z;E) \tag{6}$$

remplissant les conditions suivantes: $L(z;E) > 1$ dans $D(E)$ et

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{L(z;E)}{|z|} = \frac{1}{d(E)}. \tag{7}$$

Le logarithme de la fonction $L(z;E)$ est identique avec la fonction de Green du domaine $D(E)$ ayant son pôle à l'infini.

3. Cela posé, considérons le polynome de TCHEBYCHEFF (1) et les polynomes de LAGRANGE (4). D'après la formule d'interpolation de LAGRANGE on a identiquement

$$T_n(z;E) = \sum_{j=0}^{n} T_n(\eta_j;E) \cdot L_n^{(j)}(z;\eta). \tag{8}$$

Mais $|T_n(\eta_j;E)| \leqslant R_n$ et

$$L_n^{(j)}(z;\eta) \equiv L_n^{(0)}(z;\eta) \cdot \frac{\Delta_n^{(0)}(\eta)}{\Delta_n^{(j)}(\eta)} \cdot \frac{z-\eta_0}{z-\eta_j}$$

donc, en désignant par $\delta = \delta(z;E)$ la plus courte distance d'un point z de $D(E)$ à l'ensemble E, on a d'après (3) et (8)

$$|T_n(z;E)| \leqslant (n+1)R_n \cdot |L_n^{(0)}(z;\eta)| \cdot \frac{z-\eta_0}{\delta}.$$

Puisque $\sqrt[n]{R_n} \to d(E)$ il résulte de la dernière inégalité et de (6) qu'en chaque point du domaine $D(E)$ on a

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|T_n(z;E)|} \leqslant L(z;E) \cdot d(E). \tag{9}$$

4. Posons

$$T_n(z;E) = (z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\ldots(z-\gamma_n) \text{ [5])} \tag{10}$$

---

[4]) F. Leja: Ann. Soc. Polon. de Math. t. 12 (1934), p. 57—71.

[5]) La position des points $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ dépend de n (voir la remarque 2, p. 2).

et désignons par C le plus petit ensemble fermé convexe contenant E. Tous les points-zéro γ_i des polynomes de TCHEBYCHEFF $T_n(z;E)$ appartiennent à C car, dans le cas contraire, il existerait une droite p séparant p. c. le point γ_1 de l'ensemble C et alors le maximum du module du polynome $P_n(z) = (z-\gamma_1')(z-\gamma_2)\dots(z-\gamma_n)$ dans l'ensemble E, où γ_1' est la projection du point γ_1 sur p, serait plus petit que celui de $T_n(z;E)$.

Désignons par Z l'ensemble des points-zéro de tous les polynomes $T_n(z;E)$ et par Z' l'ensemble des points d'accumulation de Z contenus dans le domaine $D(E)$. Il suit de ce qui précède que Z et Z' font partie de C. Je vais démontrer que:

Si le diamètre transfini $d(E)$ est positif, la suite $\{\sqrt[n]{|T_n(z;E)|}\}$ converge dans la domaine $D(E)-Z'$ vers la limite

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|T_n(z;E)|} = L(z;E)\cdot d(E), \tag{11}$$

la convergence étant uniforme dans chaque domaine fermé contenu dans $D(E)-Z'$.

Démonstration. Formons les fonctions rationnelles

$$R_n(z) = \frac{T_n(z;E)}{L_n^{(0)}(z;\eta)}\cdot\frac{1}{\Delta_n^{(0)}(\eta)} = \frac{(z-\gamma_1)\dots(z-\gamma_n)}{(z-\eta_1)\dots(z-\eta_n)}, \quad n=1,2,\dots, \tag{12}$$

et soit Δ un domaine simplement connexe quelconque contenu avec sa frontière dans le domaine $D(E)-Z'$ et contenant le point $z=\infty$ dans son intérieur.

Les fonctions (12) sont toutes régulières à l'infini et y prennent la valeur 1. Leurs points-zéro γ_i et leurs pôles η_i sont situés à l'extérieur de Δ pourvu que l'indice n soit plus grand qu'un nombre N dépendant de Δ. Par suite, les fonctions

$$\sqrt[n]{R_n(z)}, \qquad n=N+1, N+2, \dots \tag{13}$$

sont holomorphes et uniformes dans Δ.

On vérifie aisément que la suite (13) est uniformement bornée dans Δ. En effet, soit r un nombre positif si grand que l'ensemble C soit contenu dans le cercle $|z|\leqslant r$ et qu'on

ait $|\zeta : z| < \frac{1}{2}$ lorsque ζ parcourt C et $|z|$ est plus grand que r. Aux points extérieurs du cercle $|z| \leqslant r$ on a $\sqrt[n]{|R_n(z)|} < 3$, car $\left|1 - \frac{\gamma_l}{z}\right| < \frac{3}{2}$ et $\left|1 - \frac{\eta_l}{z}\right| > \frac{1}{2}$. D'autre part, soit 2δ la plus courte distance entre le domaine Δ et la frontière du domaine $D(E) - Z'$. Alors, aux points de Δ intérieurs au cercle $|z| \leqslant r$ on a $|z - \gamma_l| < 2r$ et $|z - \eta_l| > \delta$ donc $\sqrt[n]{|R_n(z)|} < 2r/\delta$, ce qui prouve notre assertion.

Les fonctions (13) forment donc dans le domaine Δ une famille normale au sens de M. MONTEL. Je dis que:

La suite de modules $\{|\sqrt[n]{R_n(z)}|\}$ tend dans Δ vers 1, la convergence étant uniforme dans chaque domaine fermé contenu dans Δ.

En effet, de chaque suite partielle de la suite (13) on peut extraire une autre suite partielle tendant uniformément vers une fonction analytique $R(z)$. Puisque $R_n(\infty) = 1$ on a $|R(\infty)| = 1$. D'après le principe de maximum les deux cas seulement sont possibles: Ou bien le module de $R(z)$ surpasse 1 dans certains points de Δ, ou bien il est constamment égal à 1. Or, il suit de (9) qu'on a $|R(z)| \leqslant 1$ donc $|R(z)| = 1$ partout dans Δ. La suite $\{|\sqrt[n]{R_n(z)}|\}$ tend vers 1 car les modules de toutes les fonctions-limite de la suite $\{\sqrt[n]{R_n(z)}\}$ se réduisent à 1.

Observons maintenant que, d'après (12), on a

$$\sqrt[n]{|T_n(z;E)|} = |\sqrt[n]{R_n(z)}| \cdot \sqrt[n]{|L_n^{(0)}(z;\eta)|} \cdot \sqrt[n]{|\Delta_n^{(0)}(\eta)|}.$$

La proposition (11) résulte de cette identité en vertu de (6) et du fait que $\lim \sqrt[n]{|\Delta_n^{(0)}(\eta)|} = d(E)$.

5. Désignons par $G(x,y;E)$ la fonction de GREEN du domaine $D(E)$ ayant son pôle à l'infini. On sait que $G(x,y;E) = \log L(z;E)$, où $z = x + iy$, donc il suit du théorème précédant que:

Si $d(E) > 0$ *la suite* $\left\{\frac{1}{n}\log|T_n(z;E)|\right\}$ *tend dans le domaine* $D(E)$, *à l'exception des points d'accumulation des racines des*

polynomes $T_n(z;E)$, *vers la limite*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|T_n(z;E)| = G(x,y;E)+\log d(E). \tag{13}$$

Il se présente la question de savoir si la relation (13) peut cesser être vraie aux points d'accumulation des racines des polynomes $T_n(z;E)$ appartenant au domaine $D(E)$? La réponse est affirmative comme cela prouve l'exemple suivant:

Soient α et $\beta>\alpha$ deux nombres positifs quelconques et E l'ensemble des points des deux segments $-\beta\leqslant x\leqslant-\alpha$ et $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ situés sur l'axe réel. Les racines γ_i du polynome de Tchebycheff

$$T_n(z;E)=(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\dots(z-\gamma_n)$$

attaché à E appartiennent à l'intervalle $-\beta\leqslant x\leqslant\beta$. Ils sont distribués symétriquement par rapport au centre de cet intervalle car, l'ensemble E étant symétrique par rapport au point $z=0$, on a

$$\max_E|T_n(z;E)| = \max_E|(-z-\gamma_1)\dots(-z-\gamma_k)| =$$
$$= \max_E|(z+\gamma_1)|\dots|(z+\gamma_n)|,$$

donc les deux polynomes

$$(z-\gamma_1)\dots(z-\gamma_n) \quad\text{et}\quad (z+\gamma_1)\dots(z+\gamma_n)$$

doivent être identiques car il n'existe qu'un seul polynome de Tchebycheff du dégré n attaché à E.

Il en résulte que les polynomes $T_{2\nu+1}(z;E)$ des dégrés impairs s'annulent au point $z=0$ et par suite l'égalité (13) ne peut pas avoir lieu en ce point.

SUR LA THÉORIE DES OBJETS GÉOMÉTRIQUES

(Les objets différentiels purs de deuxième et de troisième classe)

Par St. Gołąb, Kraków

La notion de l'objet géométrique fut, comme s'expriment Schouten et Haantjes dans leurs derniers travaux [1]), le sujet principal de la géométrie différentielle moderne. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage cité où le developpement de la notion de l'objet géométrique est traité d'une manière détaillée; nous nous bornons ici aux définitions et aux propriétés les plus importantes.

Parmi les objets géométriques *spéciaux* de la classe donnée [2]), nous distinguons une sous-classe qui est caractérisée par le fait que dans les formules de transformations des composantes d'objet les coordonnées ne figurent pas. Nous allons donner aux objets pareils le nom des *„objets différentiels purs"*.

Le problème qui se pose est celui de la détermination de tous les objets différentiels purs possibles d'une classe donnée. Posé dans toute sa généralité, ce problème appartient, sans doute, aux plus difficiles de la théorie des objets géométriques.

Nous allons traiter le cas le plus simple où l'on a affaire à un espace d'une dimension dans lequel l'objet n'a qu'une seule et unique composante.

Le problème correspondant concernant les objets différentiels de première classe fut résolu par moi dans une recherche antérieure [3]).

Le but de la présente recherche consiste dans la détermination des objets différentiels purs de deuxième et de troisième

---

[1]) J. A. Schouten et J. Haantjes, *Zur Theorie des geometrischen Objektes*, C. R. d. Congrès International des Mathématiciens Oslo 1936, t. 2, p. 155—159; ainsi que J. A. Schouten and J. Haantjes, *On the theory of the geometric object*, Proc. London Math. Society 42 (1937), 356—376.

[2]) l. c. [1]) § 5, p. 371.

[3]) St. Gołąb, *Über die Klassifikation der geometrischen Objekte*. Math. Zeitschr. 44 (1938), 104—114.

classe, moyennant certaines suppositions de régularité très générales. Un problème de même importance fut traité et résolu, il y a une quarantaine d'années, par M. E. CARTAN. Dans sa recherche, parue dans les Annales de l'Ecole Normale Supérieure (XXI (1904), 153—206 et XXII (1905), 219—308) sous le titre: „Sur la structure des groupes infinis de transformations", se trouve un chapitre consacré à la détermination de tous les groupes isomorphes holoédriques d'un groupe donné. On y trouve les analogues des formules des transformations des objets géométriques *„simples"* de deuxième et de troisième classe.

Je me suis décidé, malgré cela, de publier mes résultats pour des raisons suivantes: Le travail de M. E. CARTAN parut bien avant que furent fondées et développées les bases de la théorie des objets géométriques et il pourrait facilement passer inaperçu par ceux qui s'occupent de cette théorie. La méthode de la théorie de groupes des transformations de LIE dont se sert M. E. CARTAN lui permet d'obtenir ses résultats sous une forme plus élégante; elle le réalise, cependant, en faisant des suppositions moins générales que les nôtres. De plus, cette méthode n'est pas dépourvue de lacunes et elle est, sans contredit, moins exacte que la nôtre. De la méthode de M. CARTAN nous ne pouvons que pressentir comment serait il possible de déduire tous les objets dits „simples". Et c'est là que réside la finesse du problème, comme le montre bien le cas des objets géométriques de première classe [4]).

I. Les objets différentiels purs de deuxième classe.

Considérons un espace à une dimension X_1, à la base duquel se trouve un pseudo-groupe [5]) $\mathfrak{G}$ renfermant toutes les trans-

---

[4]) Je crois de mon dévoir d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à Monsieur J. Haantjes qui se donna la peine de lire le manuscrit de ce travail. Je me suis empressé de suivre ses conseils précieux en simplifiant le texte en certains endroits.

[5]) La conception du pseudo-groupe de transformations introduite par O. Veblen et J. H. C. Whitehead dans le *„The foundations of differential geometry"* Cambridge Tracts 1932 fut établi récemment par moi. La recherche consacrée à ce sujet fut publiée dans les Mathematische Annalen 116 (1939), 768—780 sous le titre: *Über den Begriff der „Pseudogruppe von Transformationen"*.

formations de la classe C_2, c'est à dire celles qui sont pourvues de la seconde dérivée continue et qui sont en plus régulières dans le sens que leur première dérivée est différente de zéro.

Chaque point Ξ du continu à une dimension X_1 est déterminé dans un système de coordonnées donné B_1 par la coordonnée correspondante ξ_1. Si nous passons à un autre système de coordonnées B_2 à l'aide d'une transformation qui appartient au pseudo-groupe $\mathfrak{G}$, la coordonnée du point fixe Ξ change d'après une équation de la forme

$$\xi_2 = \varphi(\xi_1). \tag{1}$$

Si nous pouvons faire adjoindre d'une manière univoque au point Ξ et à tout système de coordonnées admissible (qui peut être obtenu d'un système de coordonnées donné à priori par une transformation du pseudo-groupe $\mathfrak{G}$) un nombre Ω, nous dirons qu'un *objet* (à une composante) est défini au point Ξ. Pour un Ξ fixe, la composante Ω de l'objet est une fonctionnelle univoque du système de coordonnées B. Nous désignerons dans la suite par B_i un système quelconque de coordonnées et par Ω_i la composante de l'objet par rapport à ce système.

Dans le cas particulier, où Ω_2 peut être calculé dès que l'on connait la composante Ω_1 et la transformation T_{12} conduisant de B_1 au B_2, nous dirons que l'on a un *objet géométrique*. Pour les objets géométriques on a donc la formule de transformation de la composante de la forme:

$$\Omega_k = f(\Omega_i; T_{ik}) \tag{2}$$

où la fonction f ne dépend pas du choix du système des coordonnées B_i et B_k.

En particulier, si la fonctionnelle désigne une fonction explicite des coordonnées ξ_i, ξ_k et des dérivées de la fonction φ $(\xi_k = \varphi(\xi_i))$ du premier et du second ordre, nous dirons d'après Schouten et Haantjes que l'objet est un *objet spécial de deuxième classe*. La formule de transformation sera dans ce cas:

$$\Omega_2 = f(\Omega_1; \xi_1, \varphi(\xi_1), \varphi'(\xi_1), \varphi''(\xi_1)). \tag{3}$$

Il peut arriver que le second membre de (3) soit indépendant de ξ_1, et de $\xi_2 (= \varphi(\xi_1))$. Dans ce cas nous dirons que Ω

est *l'objet différentiel pur* [6]). Pour les objets différentiels purs de deuxième classe on a la formule de transformation simplifiée

$$\Omega_2 = f(\Omega_1; \varphi', \varphi''). \tag{4}$$

La fonction f doit satisfaire à une équation fonctionnelle itérée, ce qui est une conséquence de la propriété des groupes. Pour arriver à cette équation nous prendrons en considération trois systèmes de repères arbitraires B_1, B_2, B_3 et désignerons par

$$\xi_k = \varphi_{ik}(\xi_i) \tag{5}$$

la transformation qui effectue le passage de la coordonnée ξ_i à la coordonnée ξ_k. D'une part nous avons

$$\begin{cases} \Omega_2 = f\{\Omega_1; \varphi'_{12}(\xi_1), \ \varphi''_{12}(\xi_1)\} \\ \Omega_3 = f\{\Omega_1; \varphi'_{13}(\xi_1), \ \varphi''_{13}(\xi_1)\} \\ \Omega_3 = f\{\Omega_2; \varphi'_{23}(\xi_1), \ \varphi''_{23}(\xi_1)\}. \end{cases} \tag{6}$$

D'autre part on a

$$\varphi_{13}(\xi_1) = \varphi_{23}[\varphi_{12}(\xi_1)] \tag{7}$$

et par conséquent aussi

$$\begin{cases} \varphi'_{13}(\xi_1) = \varphi'_{23}[\xi_2] \cdot \varphi'_{12}(\xi_1) \\ \varphi''_{13}(\xi_1) = \varphi''_{23}[\xi_2] \cdot \varphi'^2_{12}(\xi_1) + \varphi'_{23}[\xi_2] \cdot \varphi''_{12}(\xi_1). \end{cases} \tag{8}$$

Si l'on tient compte de ces relations dans (6), on est conduit à l'identité suivante:

$$\begin{cases} f\{\Omega_1; \varphi'_{23}[\xi_2] \cdot \varphi'_{12}(\xi_1), \ \varphi''_{23}[\xi_2] \cdot \varphi'^2_{12}(\xi_1) + \varphi'_{23}[\xi_2] \cdot \varphi''_{12}(\xi_1)\} = \\ \qquad = f\{f[\Omega_1; \varphi'_{12}(\xi_1), \ \varphi''_{12}(\xi_1)]; \ \varphi'_{23}(\xi_2), \ \varphi''_{23}(\xi_2)\}. \end{cases} \tag{9}$$

De la définition du pseudo-groupe (choix à peu près arbitraire des fonctions φ_{12} et φ_{23}) s'ensuit que la fonction f doit satisfaire à l'équation fonctionnelle:

[6]) Il ne faut pas confondre la notion d'un *objet différentiel pur* avec celle d'un *comitant pur* (ou propre) que j'ai introduit dans le travail „*Sur quelques points concernant la notion du comitant*". Ann. Soc. Pol. Math. 17 (1938), 177—192.

$$(10) \qquad \boxed{f(x,\ \beta_1 \cdot \alpha_1,\ \beta_2 \alpha_1^2 + \beta_1 \alpha_2) = f\{f(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2),\ \beta_1,\ \beta_2\}}$$

et cela pour tous les α_1, β_1 différents de zéro:

$$(11) \qquad \alpha_1 \neq 0, \quad \beta_1 \neq 0$$

et pour tous les α_2, β_2 sans restriction. En ce qui concerne le domaine d'existence E pour la première variable x de la fonction f, quelques cas particuliers sont à discuter auparavant.

Nous voulons établir tout d'abord une identité supplémentaire à laquelle doit satisfaire la fonction f et qui n'est aucunement une conséquence de la relation (10). Remarquons que la transformation identique appartient aussi à notre pseudogroupe $\mathfrak{G}$. Dans une telle transformation la composante de l'objet, conformément à la définition, ne peut pas changer. Pour la transformation identique on a: $\varphi' = 1$, $\varphi'' = 0$. Il en résulte que

$$(12) \qquad \boxed{f(x,\ 1,\ 0) \equiv x \text{ pour tous les } x \in E}.$$

Il s'agit maintenant de déterminer la structure de l'ensemble E. Quelques éventualités sont à considérer.

I. Si l'ensemble E ne se compose que d'un seul et unique point x_0, on aura un *scalaire*, qui n'est, somme toute, qu'un objet de la classe zéro.

II. Si E se compose de deux points isolés x_1, x_2 on démontrera pareillement, comme dans le cas des objets de première classe [7]) que l'objet est un *biscalaire* [8]).. Dans ce cas également les dérivées secondes de la fonction φ n'interviennent pas. L'objet appartiendra en réalité à la première classe.

Nous allons dans la suite négliger les deux cas I et II, en supposant que l'ensemble E renferme plus que deux points. Afin d'exclure les solutions non régulières de l'équation (10) nous supposerons que la fonction

$$(13) \qquad f(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2)$$

---

[7]) l. c. [3]).

[8]) M. Schouten donne à ces objets le nom de „*W-scalaires*". Voir J. A. Schouten, *Über die geometrische Deutung von gewöhnlichen p-Vektoren und W-p-Vektoren und den korrespondierenden Dichten.* Proc. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam 41 (1938), 709—716.

est pourvue dans le domaine (D) de dérivées partielles du premier ordre continues. Pour les raisons typographiques nous adopterons pour ces dérivées les abréviations suivantes:

$$(14) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = f_2, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = f_3.$$

Le domaine (D), dont il est question, est défini comme suit:

$$(15) \qquad (D): x \in E, \; a_1 \neq 0, \; a_2 \text{ quelconque}.$$

Afin de ne considérer que les objets essentiellement de deuxième classe, nous ferons en dernier lieu la supposition:

$$(16) \qquad f_3 \not\equiv 0.$$

Nous allons démontrer plus tard que E se compose d'un seul et unique intervalle (fini ou infini). Pour le moment nous ne pouvons que conclure ce qui suit: E se compose d'un seul intervalle E_0, ou bien de deux intervalles E_1 et E_2 séparés, où tout au plus contigus. Pour le prouver, remarquons que l'ensemble des valeurs de la fonction f doit appartenir à E. La fonction f pour $a_1 > 0$, a_2 arbitraire, de même que pour $a_1 < 0$, a_2 arbitraire, étant continue, on en déduit que E ne peut pas contenir plus de deux parties d'un seul tenant. De même que pour les objets de première classe, on peut démontrer [9]) que l'on doit exclure le cas où E pourrait se composer d'un intervalle et d'un point isolé. Alors il ne nous reste que deux eventualités susmentionnées.

Nous introduirons maintenant les notations abrégées suivantes:

$$(17) \qquad g(x, a) = f(x, a, 0)$$

$$(18) \qquad h(x, \beta) = f(x, 1, \beta).$$

Si l'on substitue $a_2 = \beta_2 = 0$ dans l'équation (10) on obtient l'équation

$$(19) \qquad g(x, a_1 \cdot \beta_1) = g\{g(x, a_1), \beta_1\}$$

---

[9]) l. c. [3]), p. 111.

qui est celle de l'equation fonctionnelle bien connue des objets de la classe Δ[10]).

Nous introduirons maintenant deux définitions.

Définition I. Un point x_0 de l'ensemble E sera dit un point singulier de première espèce si

$$g(x_0, \alpha) = \text{const. pour tous les } \alpha > 0. \tag{20}$$

Définition II. Un point x_0 de l'ensemble E sera dit un point singulier de seconde espèce si

$$h(x_0, \beta) = \text{const. pour tous les } \beta. \tag{21}$$

Lemme. Les points singuliers de seconde espèce n'existent pas.

Démonstration. Afin d'arriver à une contradiction, nous allons supposer qu'il existe un point $x_0 \in E$ pour lequel a lieu l'égalité (21). Il s'ensuivra d'après (12):

$$f(x_0, 1, \beta) \equiv x_0 \text{ pour tous les } \beta. \tag{22}$$

Si l'on pose $x = x_0$, $\alpha_1 = 1$ dans (10), on aura, en tenant compte de (22):

$$f(x_0, \beta_1, \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) = f(x_0, \beta_1, \beta_2). \tag{23}$$

Cette identité exprime que $f(x_0, \beta_1, \beta_2)$ devrait être indépendante de la troisième variable pour toute valeur de β_1. On aurait donc

$$f(x_0, \alpha_1, \alpha_2) = \mu(\alpha_1). \tag{24}$$

Envisageons un x quelconque de l'ensemble E. De la définition de l'objet géométrique résulte qu'il serait possible de trouver deux valeurs α_1 et α_2 pour que

$$f(x, \alpha_1, \alpha_2) = x_0. \tag{25}$$

Les valeurs α_1 et α_2 dépendent naturellement de x. Si l'on substitue (25) dans (10), on obtient d'après (24):

$$f(x, \beta_1 \alpha_1, \beta_2 \alpha_1^2 + \beta_1 \alpha_2) = \mu(\beta_1). \tag{26}$$

Le second membre de (26) ne dépend pas de β_2; α_1 étant différent de zéro, il s'ensuit que $f(x, \beta_1 \cdot \alpha_1, \gamma)$ devrait être indé-

[10]) l. c. [3]), l'équation (8).

pendant de γ; β_1 étant quelconque, il s'ensuivrait que $f_3 = 0$ ce qui contredit à notre supposition (16).

Il s'agit maintenant de déterminer la forme de la fonction h, définie par l'équation (18). Dans ce but, nous poserons $a_1 = \beta_1 = 1$ dans l'équation (10). Ceci conduit à l'équation fonctionnelle suivante pour la fonction h:

(27) $$h(x, \beta_2 + a_2) = h\{h(x, a_2), \beta_2\}.$$

L'équation (27) montre une structure si analogue à celle de l'équation (19) que l'on est immédiatement tenté de ramener la résolution de cette équation (27) à l'équation (19) déjà résolue [11]).

Nous désignerons par E_0 soit l'ensemble E tout entier, s'il se compose d'un seul intervalle, soit un des intervalles E_1, E_2, si E se compose de deux intervalles séparés (ce dernier cas se montrera plus tard comme étant impossible).

Nous posons encore:

(28) $$H(x, \beta) = h(x, \log \beta) \qquad \beta > 0$$

et remarquons que la fonction H satisfait à l'équation suivante:

(29) $$H(x, \beta_2 \cdot a_2) = H\{H(x, a_2), \beta_2\} \qquad a_2 > 0, \beta_2 > 0.$$

Cette équation est de la même forme que (19); de plus, les restrictions $a_2 > 0, \beta_2 > 0$ en facilitent la solution. Nous pouvons écrire, d'après un résultat connu [12]):

(30) $$H(x, \beta) = \sum \left[\beta \cdot \sigma(x)\right] \qquad x \in E_0, \beta > 0$$

où $\sum(u)$ est une fonction monotone au sens stricte [13]) (croissante ou décroissante) définie pour tous les $u > 0$ et σ signifie la fonction inverse de $\sum$. Il s'ensuit de là que:

(31) $$h(x, a) = H(x, e^a) = \sum \left[e^a \cdot \sigma(x)\right].$$

[11]) St. Gołąb, *Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte*. Wiadom. Matem. Warszawa 45 (1938), 97—137.

[12]) l. c. [11]). On doit remarquer que c'est précisément la non-existance des points singuliers de seconde espèce qui nous permet de tirer la conclusion si simple.

[13]) Ici, ainsi que dans la suite, interviendront seulement les fonctions monotones au sens strict et, par conséquent, nous allons employer le mot „*monotone*" dans ce sens.

L'ensemble de valeurs de σ étant identique au domaine d'existence de $\sum$ on aura donc:

(32) $$\sigma(x) > 0 .$$

On peut alors poser

(33) $$\sigma(x) = e^{\lambda(x)}.$$

Si l'on désigne par Λ la fonction inverse de λ, on obtient

(34) $$\sum(u) = \Lambda[\log u]$$

et on parvient finalement à la relation:

(35) $$h(x,\alpha) = \Lambda[\log(e^{\alpha+\lambda(x)})] = \Lambda(\alpha+\lambda(x)), \quad \alpha \text{ quelconque}, \ x \in E_0,$$

$\Lambda(u)$ est une fonction monotone pour tous les u.

La fonction f peut maintenant être exprimée pour $x \in E_0$ à l'aide des fonctions g et h. Si nous posons dans l'équation (10) $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, on obtient:

(36) $$f(x, \alpha_1, \beta_2 \alpha_1^2) = h\{g(x, \alpha_1), \beta_2\}$$

et l'on parvient au moyen de la substitution

(37) $$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_2 = \frac{\beta}{\alpha^2}$$

à la relation

(38) $$\boxed{f(x, \alpha, \beta) = h\left\{g(x, \alpha), \frac{\beta}{\alpha^2}\right\}}.$$

Si nous posons maintenant $\alpha_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ dans (10), on aura:

(39) $$f(x, \beta_1, \beta_1 \alpha_2) = g\{h(x, \alpha_2), \beta_1\},$$

ce qui, après le changement des variables

(40) $$\beta_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \frac{\beta}{\alpha},$$

conduit à la relation

(41) $$\boxed{f(x, \alpha, \beta) = g\left\{h\left(x, \frac{\beta}{\alpha}\right), \alpha\right\}}.$$

L'identification des formules (38) et (41) va nous permettre d'établir la relation cherchée entre les fonctions g et h. On doit auparavant montrer que l'ensemble E est d'un seul tenant, c.-à-d. qu'il est impossible que E puisse se composer de deux intervalles séparés E_1 et E_2. Nous montrerons qu'une telle supposition conduira à la contradiction. Considérons la formule:

$$f(x, \alpha, \beta) = \Lambda\left\{\frac{\beta}{\alpha^2} + \lambda\left[g(x, \alpha)\right]\right\} \tag{42}$$

valable pour tous les $x \in E_1$. Désignons par M l'ensemble de valeur de la fonction Λ. D'après ce qui était établi jusqu'à présent, M est un intervalle (ouvert). Il s'ensuit de la définition même des objets géométriques que pour tout couple $x_1, x_2 \in E$ il existe les nombres α_0, β_0 pour lesquels

$$x_2 = f(x_1, \alpha_0, \beta_0). \tag{43}$$

Fixons en particulier x_1 dans E_1 et laissons x_2 parcourir tout l'ensemble E; il en résultera que E doit être contenu dans M. Inversement, si nous fixons dans la formule (42) les valeurs de x (de E_1) et de α et si nous laissons β prendre toutes les valeurs réelles possibles, nous en concluerons que M est contenu dans F, où F est l'ensemble de valeurs de f (pour tous les $x \in E$). Il s'ensuit de l'équation fonctionnelle que F doit être contenu dans E. Finalement, nous aurons que $M \subset E$ ce qui, comparé aux résultats précédents, conduit à la conclusion $M = E$. M étant un intervalle, nous sommes arrivés à la contradiction. E se réduit alors à E_0, où les deux formules (38) et (41) sont appliquables.

Nous affirmons maintenant que E_0 renferme exactement un point singulier de première espèce. Pour le prouver nous introduirons les abréviations:

$$\nu(x) = g(x, -1) \tag{44}$$

$$\omega(x) = \lambda[\nu(x)] \tag{45}$$

et nous poserons $\alpha = -1$ dans les formules (38) et (41). La comparaison nous donne:

$$\Lambda\{\beta + \omega(x)\} = \nu\{\Lambda\left[-\beta + \lambda(x)\right]\}. \tag{46}$$

Si nous appliquons l'opérateur λ aux deux membres de cette identité, nous obtiendrons que

(47) $$\beta + \omega(x) = \omega\left\{\Lambda\left[-\beta + \lambda(x)\right]\right\}.$$

Si l'on différentie les deux membres de cette dernière identité par rapport à β

(48) $$1 = \omega'\left\{\Lambda\left[-\beta + \lambda(x)\right]\right\} \cdot \Lambda'\left[-\beta + \lambda(x)\right](-1)$$

et que l'on y pose $\beta = 0$, on aura, en tenant compte de ce que $\Lambda'\left[\lambda(x)\right] = \frac{1}{\lambda'(x)}$, la relation simple:

(49) $$\omega'(x) = -\lambda'(x)$$

ou bien:

(50) $$\omega(x) = -\lambda(x) + c$$

où c est une constante dont la valeur en ce moment est pour nous sans importance. Les relations (45) et (50) donnent:

(51) $$\nu(x) = \Lambda\left[c - \lambda(x)\right].$$

Considérons maintenant l'équation:

(52) $$\nu(x) = x.$$

A cause de (51) elle est équivalente à l'équation: $x = \Lambda[c - \lambda(x)]$, ou bien à $\lambda(x) = c - \lambda(x)$, ou bien encore à

(53) $$\lambda(x) = \frac{c}{2}.$$

La dernière équation n'a qu'une seule solution:

(54) $$x_0 = \Lambda\left(\frac{c}{2}\right)$$

comprise dans l'intérieur de l'intervalle E_0. D'après un résultat antérieur [14]) nous pouvons conclure que x_0 est un point singulier de première espèce. Nous avons ainsi établi que E_0 contient au moins un point singulier de première espèce. Nous voulons maintenant montrer indirectement que E_0 ne peut pas contenir plus d'un point singulier de première espèce.

[14]) l. c. [11]).

Pour cela nous supposerons qu'il y aurait dans E_0 encore un autre point singulier x_1. Nous poserons

(55) $$\beta_0 = a \cdot \left[\lambda(x_1) - \lambda(x_0)\right]$$

et nous allons calculer d'après (35) et (41) la valeur de $f(x_0, a, \beta_0)$:

(56) $$f(x_0, a, \beta_0) = g\left\{\Lambda\left[\lambda(x_1) - \lambda(x_0) + \lambda(x_0)\right], a\right\} = g(x_1, a).$$

On a, à cause de la supposition sur x_1:

(57) $$g(x_1, a) \equiv x_1 \text{ pour tous les } a > 0.$$

Par suite:

(58) $$f(x_0, a, \beta_0) \equiv x_1 \text{ pour tous les } a > 0.$$

D'autre part nous avons d'après (38):

(59) $$f(x_0, a, \beta_0) = \Lambda\left\{\frac{\beta_0}{a^2} + \lambda\left[g(x_0, a)\right]\right\} = \Lambda\left\{\frac{\beta_0}{a^2} + \lambda(x_0)\right\}$$

pour tous les $a > 0$. Si l'on compare (58) avec (59), on obtient

(60) $$\frac{\beta_0}{a^2} + \lambda(x_0) \equiv \lambda(x_1) \text{ pour tous les } a > 0$$

ce qui, comparé avec (55), conduirait à la conclusion $\beta_0 = 0$ c'est-à-dire que $\lambda(x_1) = \lambda(x_0)$ et, par suite, à cause de la monotonie de λ, à la conclusion contradictoire $x_1 = x_0$. Il est ainsi démontré que E_0 ne contient qu'un seul point singulier de première espèce.

Le point x_0 partage l'intervalle E_0 en deux intervalles partiels que nous désignerons par E_1 et E_2 et qui ne contiennent plus dans leur intérieur aucun autre point singulier. Des résultats obtenus par nous précédemment [15]) il s'ensuit qu'il existe dans $E_0 - (x_0)$ une fonction (essentiellement unique)

(61) $$\varphi(x)$$

qui est inversible dans $E_0 - (x_0)$, qui est continue dans E_1 et dans E_2 et pour laquelle on a la relation

(62) $$g(x, a) = \Phi\left[a \cdot \varphi(x)\right] \text{ pour tous les } x \in E_0,\ x \neq x_0$$

et tous les $a \neq 0$, où Φ désigne la fonction inverse de la fonction φ.

---

[15]) l. c. [11]).

Nous allons maintenant revenir aux formules (38) et (41) en tenant compte des formules (35) et (62). Cela donne:

$$(63)\qquad \begin{cases} f(x,a,\beta)=\Lambda\left[\frac{\beta}{a^2}+\lambda\left\{\Phi\left[a\cdot\varphi(x)\right]\right\}\right] \\ f(x,a,\beta)=\Phi\left[a\cdot\varphi\left\{\Lambda\left(\frac{\beta}{a}+\lambda(x)\right)\right\}\right] \end{cases} \qquad \begin{matrix} a\neq 0 \\ x\in E_0,\ x\neq x_0. \end{matrix}$$

De la comparaison de deux seconds membres de ces relations nous établirons la relation anoncée entre Φ et Λ. Dans ce but nous poserons

$$(64)\qquad \Psi(u)=\lambda\left[\Phi(u)\right].$$

Il est facile de montrer que la fonction Ψ est inversible et son inverse ψ s'exprime comme suit:

$$(65)\qquad \psi(u)=\varphi\left[\Lambda(u)\right].$$

De l'identité

$$(66)\qquad \Lambda\left(\frac{\beta}{a^2}+\lambda\Phi\left[a\cdot\varphi(x)\right]\right)\equiv\Phi\left\{a\cdot\varphi\Lambda\left[\frac{\beta}{a}+\lambda(x)\right]\right\}$$

nous obtenons, en appliquant l'opérateur λ:

$$(67)\qquad \frac{\beta}{a^2}+\Psi\left[a\cdot\varphi(x)\right]\equiv\Psi\left\{a\cdot\psi\left[\frac{\beta}{a}+\lambda(x)\right]\right\}.$$

Si l'on différentie cette identité la première fois par rapport à β et la seconde fois par rapport à x on aura:

$$(68)\qquad \begin{cases} \frac{1}{a^2}\equiv\Psi'\left\{a\cdot\psi\left[\frac{\beta}{a}+\lambda(x)\right]\right\}\cdot\psi'\left[\frac{\beta}{a}+\lambda(x)\right] \\ \Psi'\left[a\cdot\varphi(x)\right]\cdot a\varphi'(x)\equiv\Psi'\left\{a\cdot\psi\left[\frac{\beta}{a}+\lambda(x)\right]\right\}\cdot a\cdot\psi'\left[\frac{\beta}{a}+\lambda(x)\right]\cdot\lambda'(x). \end{cases}$$

Il en résulte que

$$(69)\qquad \Psi'\left[a\cdot\varphi(x)\right]=\frac{\lambda'(x)}{\varphi'(x)}\cdot\frac{1}{a^2}.$$

Fixons dans l'intervalle E_0 un point $\bar{x}$ différent de x_0. On déduit de (69) que:

$$(70)\qquad \Psi'(u)=-\frac{a}{u^2}\qquad\left[a=-\frac{\varphi^2(\bar{x})}{\varphi'(\bar{x})}\cdot\lambda'(\bar{x})\right],$$

ce qui donne après l'intégration:

$$\Psi(u)=\frac{a}{u}+b_i \tag{71}$$

où b_1 est une constante pour $u>0$ et b_2 une constante (éventuellement différente) pour $u<0$. De (71) et (64) on tire:

$$\varphi(x)=\frac{a}{\lambda(x)-b_i} \qquad x\neq x_0 \tag{72}$$

où l'on doit placer b_1 dans un des intervalles E_1, E_2 et b_2 dans l'intervalle restant. Si l'on porte (72) dans la première des formules (63), ou obtient:

$$f(x,\alpha,\beta)=\Lambda\left\{\frac{\beta}{\alpha^2}+b_i+\frac{\lambda(x)-b_i}{\alpha}\right\} \qquad x\neq x_0. \tag{73}$$

Si nous prenons en considération la continuité de la fonction f pour $x=x_0$, la monotonie de la fonction Λ et le choix arbitraire de α, on verra que $b_2=b_1$. Le relation (73) s'écrira plus simplement:

$$f(x,\alpha,\beta)=\Lambda\left(\frac{\beta}{\alpha^2}+b+\frac{\lambda(x)-b}{\alpha}\right) \qquad x\in E_0,\ \alpha\neq 0,\ \beta \text{ quelconque.} \tag{74}$$

Posons finalement

$$\Gamma(u)=\Lambda(b-u) \tag{75}$$

et désignons par $\gamma(x)$ la fonction inverse de la fonction Γ. On aura

$$\gamma(x)=b-\lambda(x), \tag{76}$$

ce qui, avec (74), nous conduira à la formule définitive:

$$\boxed{f(x,\alpha,\beta)=\Gamma\left\{\frac{\gamma(x)}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha^2}\right\}}. \tag{77}$$

Nous sommes arrivés ainsi au résultat suivant: *Chaque objet géométrique différentiel pur qui appartient essentiellement à la seconde classe, possède la formule de transformation suivante:*

$$\Omega_2=\Gamma\left\{\frac{\gamma(\Omega_1)}{\varphi'}-\frac{\varphi''}{\varphi'^2}\right\}. \tag{78}$$

Γ désigne ici une fonction arbitraire monotone au sens strict, définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ *et γ la fonction inverse de la fonction Γ.*

Réciproquement (on le voit de suite) la formule de transformation (78) *définit un objet géométrique différentiel pur de deuxième classe.*

Désignons maintenant par Ω^* l'objet nouveau défini à l'aide de l'équation:

(79) $$\Omega^* = \gamma(\Omega).$$

Nous aurons pour cet objet Ω^* la formule de transformation:

(80) $$\boxed{\Omega_2^* = \frac{\Omega_1^*}{\varphi'} - \frac{\varphi''}{\varphi'^2}}.$$

Puisqu'en même temps que (79) on a la relation:

(81) $$\Omega = \Gamma(\Omega^*),$$

nous pouvons dire ce qui suit: *Chaque objet géométrique différentiel pur de deuxième classe est une fonction monotone d'un objet „simple" de deuxième classe avec la formule de transformation* (80).

Nous pouvons nous poser maintenant la question sur la nature d'un tel *objet de deuxième classe.* Dans ce but nous nous posons le problème suivant: Soit un champ de densités ordinaires du poids p:

(82) $$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(\xi).$$

Si l'on passe à un autre système de coordonnées au moyen de la transformation

(83) $$\bar{\xi} = \varphi(\xi),$$

$\mathfrak{w}$ se transforme à l'aide de la formule:

(84) $$\bar{\mathfrak{w}} = \mathfrak{w} \cdot (\varphi')^{-p}.$$

La dérivée covariante du champ (82) étant définie au moyen de la formule:

(85) $$D\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{w}}{d\xi} + \mu \cdot \mathfrak{w}$$ [16]),

---

[16]) Comparer St. Gołąb, *Zur Theorie des affinen Zusammenhanges im eindimensionalen Raum.* Opusc. Math. F. 2 (1938), 7—9.

nous pouvons demander que cette dérivée soit un objet géométrique. Nous pouvons même demander que $D\mathfrak{w}$ soit une densité ordinaire. De là s'ensuit la relation:

$$\overline{D\mathfrak{w}} = (\varphi')^{-q}\cdot D\mathfrak{w}. \tag{86}$$

On a d'ailleurs:

$$\begin{cases} \overline{D\mathfrak{w}} = \dfrac{d\bar{\mathfrak{w}}}{d\bar{\xi}} + \bar{\mu}\,\bar{\mathfrak{w}} = \dfrac{d\bar{\mathfrak{w}}}{d\xi}\cdot\dfrac{1}{\varphi'} + \bar{\mu}\,\mathfrak{w}(\varphi')^{-p} = \\ = \bar{\mu}\,\mathfrak{w}(\varphi')^{-p} + \dfrac{1}{\varphi'}\left\{\dfrac{d\mathfrak{w}}{d\xi}(\varphi')^{-p} - p\,\mathfrak{w}(\varphi')^{-p-1}\cdot\varphi''\right\}. \end{cases} \tag{87}$$

La comparaison de (86) avec (87) donne

$$\frac{d\mathfrak{w}}{d\xi}(\varphi')^{-q} + \mu\cdot\mathfrak{w}(\varphi')^{-q} = \frac{d\mathfrak{w}}{d\xi}(\varphi')^{-p-1} + \bar{\mu}\,\mathfrak{w}(\varphi')^{-p} - \\ - p\,\mathfrak{w}(\varphi')^{-p-2}\cdot\varphi''. \tag{88}$$

Cette relation étant valable pour tous les champ de densités, on en déduira les deux identités:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{w}}{d\xi}(\varphi')^{-q} = \dfrac{d\mathfrak{w}}{d\xi}(\varphi')^{-p-1} \\ \mu\,\mathfrak{w}(\varphi')^{-q} = \bar{\mu}\cdot\mathfrak{w}(\varphi')^{-p} - p\cdot\mathfrak{w}(\varphi')^{-p-2}\cdot\varphi''. \end{cases} \tag{89}$$

De la première de ces identités résulte que:

$$q = p + 1. \tag{90}$$

La seconde donnera, après la division par $\mathfrak{w}(\varphi')^{-p}$:

$$\mu\cdot(\varphi')^{-1} = \bar{\mu} - p(\varphi')^{-2}\cdot\varphi'', \tag{91}$$

(91) est une formule de transformation pour le coéfficient μ de l'équation (85). Si l'on pose en particulier

$$p = -1 \tag{92}$$

dans la relation (91), on obtient

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\varphi'} - \frac{\varphi''}{\varphi'^2}. \tag{93}$$

Nous voyons donc que *dans ce cas μ représente un objet géométrique simple de deuxième classe et nous pouvons dire que μ est le paramètre du déplacement parallèle.* Ce terme est

justifié et l'on voit en même temps que la formule de transformation (93) représente un cas spécial de la formule de transformation

(94) $$\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} A^k_\nu A^\lambda_i A^\mu_j + A^k_\lambda \partial_j A^\lambda_i \qquad \left(A^k_\nu = \frac{\partial \bar{\xi}^k}{\partial \xi^\nu}\right)$$

pour les paramètres d'un déplacement linéaire dans un espace n-dimensionel.

II. Les objets différentiels purs de troisième classe.

Dans ce chapitre nous nous proposons de déterminer tous les objets différentiels purs de troisième classe en faisant les mêmes suppositions de régularité qu'auparavant. Après avoir établi d'une manière détaillée l'équation fonctionnelle des objets de deuxième classe, nous allons maintenant suivre une voie abrégée en laissant de côté certaines démonstrations qui nous paraissent superflues.

La formule de transpormation pour la composante Ω d'un objet différentiel pur de troisième classe a la forme:

(1) $$\Omega_2 = f(\Omega_1, \varphi', \varphi'', \varphi''')\ ^{17}),$$

où

(2) $$\xi_2 = \varphi(\xi_1)$$

désigne, comme avant, la transformation de passage du système des coordonnées B_1 au système B_2. Si l'on se sert des formules pour les dérivées successives d'une fonction composée, on arrive, comme dans le chapitre I, à l'équation fonctionnelle suivante pour la fonction cherchée f:

(3) $$\begin{cases} f(x, a_1 \cdot \beta_1, a_1^2 \beta_2 + a_2 \beta_1, a_1^3 \beta_3 + 3a_1 a_2 \beta_2 + a_3 \beta_1) = \\ = f\{f(x, a_1, a_2, a_3), \beta_1, \beta_2, \beta_3\}. \end{cases}$$

Cette équation doit être satisfaite pour tous les x d'un certain ensemble E ainsi que pour tous les a_1 et β_1 différents de zéro

(4) $$a_1 \neq 0, \quad \beta_1 \neq 0$$

et les $a_2, \beta_2, a_3, \beta_3$ sans restriction quelconque.

[17]) Dans le chapitre précédent, le pseudo-groupe $\mathfrak{G}$ consistait en toutes les transformations de la classe C_2. Par contre nous supposons maintenant que $\mathfrak{G}$ renferme toutes les transformations de la classe C_3.

La fonction

$$(5) \qquad f(x, a_1, a_2, a_3)$$

doit en outre vérifier l'identité suivante:

$$(6) \qquad f(x, 1, 0, 0) \equiv x \text{ pour tous les } x \in E.$$

Nous supposons que la fonction f possède les premières dérivées partielles continues par rapport aux quatre variables. En outre, si nous voulons traiter les objets essentiellement de troisième classe, nous devons faire la supposition que (5) dépend réellement de a_3, c'est-à-dire que

$$(7) \qquad \frac{\partial f}{\partial a_3} = f_4(x, a_1, a_2, a_3) \not\equiv 0.$$

A cause de la continuité, E doit être un intervalle E_0 (de longueur différente de zéro) ou se composer de deux intervalles séparés (ou tout au plus contigus) E_1, E_2.

Nous allons introduire les abréviations suivantes:

$$(8) \qquad \begin{cases} \Gamma(x, \alpha, \beta) = f(x, 1, \alpha, \beta) \\ \gamma(x, \alpha) = \Gamma(x, \alpha, 0) = f(x, 1, \alpha, 0) \\ \delta(x, \beta) = \Gamma(x, 0, \beta) = f(x, 1, 0, \beta). \end{cases}$$

L'équation (3) se transforme pour $a_1 = \beta_1 = 1$ en équation:

$$(9) \qquad \Gamma(x, \beta_2 + a_2, \beta_3 + 3\, a_2 \beta_2 + a_3) = \Gamma\{\Gamma(x, a_2, a_3), \beta_2, \beta_3\}.$$

C'est une équation fonctionnelle dans laquelle ne figure que la fonction inconnue Γ et le premier problème qui se pose consiste dans la détermination de cette fonction. Remarquons de suite, que le traitement de l'équation (3) ne peut pas être ramené au problème déjà résolu pour les objets de deuxième classe, parce que, pour $a_3 = \beta_3 = 0$, l'équation (3) se transforme en équation

$$(10) \qquad f(x, a_1 \beta_1,\ a_1^2 \beta_2 + a_2 \beta_1,\ 3 a_1 a_2 \beta_2) = f\{f(x, a_1, a_2, 0),\ \beta_1,\ \beta_2,\ 0\}.$$

Dans le premier membre de cette équation ne figure pas zéro comme quatrième argument. Par conséquent, il serait impossible de le ramener à la fonction $f(x, a_1, a_2, 0)$. De (9) nous obtenons pour $a_2 = \beta_2 = 0$:

$$(11) \qquad \delta(x, \beta_3 + a_3) = \delta\{\delta(x, a_3), \beta_3\}.$$

Cette équation fut déjà traitée par nous dans le premier chapitre. Rappelons qu'on y avait une condition supplémentaire, notamment celle de la non-existence des points singuliers de seconde espèce, ce qui excluait d'avance certaines solutions. Quant à la résolution de l'équation (11), nous nous bornerons d'en énoncer les résultats. Nous désignerons, comme avant, par E_0 le continu entier E dans le cas où E est un seul intervalle, ou un des intervalles E_1, E_2 dans le cas contraire. On démontre que E_0 peut être décomposé d'une manière univoque en deux parties séparées A, B:

(12) $$E_0 = A + B$$

où A est ouvert, telles que:

(13) 1) $x \in B \supset \delta(x,\beta) = x$ pour tous les β,

2) qu'à tout intervalle A_i, dont se compose A, se rattache une fonction $\psi_i(x)$ monotone au sens stricte, définie dans A_i, qui possède la propriété

(14) $$x \in A_i \supset \delta(x,\beta) = \Psi_i\left[\beta + \psi_i(x)\right],$$

où Ψ_i désigne la fonction inverse de ψ_i.

Il n'est pas exclu qu'un des ensembles A, B puisse être vide. Nous démontrerons même plus tard que c'est B qui est vide. Admettons provisoirement l'existence d'un point x_0 appartenant à B. On aurait dans ce cas pour tous les β: $f(x_0, 1, 0, \beta) = x_0$. Si nous substituons les valeurs $x = x_0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ dans l'équation (3), on obtient:

(15) $$f(x_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 + \alpha_3\beta_1) = f(x_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Le second membre de cette équation ne dépend pas de α_3. Il s'ensuit que $f(x_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est indépendant de β_3. A une valeur quelconque donnée de $x \in E_0$ faisons correspondre α_1, α_2 tels que l'on ait:

(16) $$f(x_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = x.$$

Substituons (16) dans l'équation (3). Nous obtiendrons

(17) $$f(x, \alpha_1\beta_1, \alpha_1^2\beta_2 + \alpha_2\beta_1, \alpha_1^3\beta_3 + 3\alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1) = f(x, \beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Nous ferons maintenant varier a_3 arbitrairement dans la dernière identité (a_1 et a_2 étant déjà fixés par le choix de x). Il en résultera que f sera indépendante de la quatrième variable ce qui est en désaccord avec (7). Nous avons ainsi démontré que B est vide et que, par conséquent, E se réduit à un seul intervalle ouvert. Nous prouverons ensuite que E_0 se confond avec l'ensemble entier E. Si l'on pose dans l'équation (3) d'abord $a_3=\beta_2=0$ et ensuite $a_2=\beta_3=0$, on obtient, en prenant en considération les notations (8):

$$\tag{18} \begin{cases} \Gamma(x,a_2,\beta_3)=\delta\{\gamma(x,a_2),\beta_3\} \\ \Gamma(x,\beta_2,a_3)=\gamma\{\delta(x,a_3),\beta_2\}, \end{cases}$$

ce qui, en tenant compte de (14), nous permet d'écrire

$$\tag{19} \begin{cases} \Gamma(x,a,\beta)=\Psi\left\{\beta+\psi\left[\gamma(x,a)\right]\right\}^{18)} \\ \Gamma(x,a,\beta)=\gamma\left\{\Psi\left[\beta+\psi(x)\right],a\right\} \end{cases} \qquad \text{pour } x\in E_0.$$

Nous en déduirons l'identité:

$$\tag{20} \Psi\left\{\beta+\psi\left[\gamma(x,a)\right]\right\}=\gamma\left\{\Psi\left[\beta+\psi(x)\right],a\right\}.$$

Nous allons maintenant tirer de cette identité quelques conclusions. Nous introduirons pour cela la fonction auxiliaire:

$$\tag{21} \sigma(x,a)=\psi\left[\gamma(x,a)\right];$$

(20) sera alors équivalent à l'identité

$$\tag{22} \beta+\sigma(x,a)=\sigma\left\{\Psi\left[\beta+\psi(x)\right],a\right\}.$$

La dérivation de cette identité par rapport à a donne

$$\tag{23} \sigma_2(x,a)=\sigma_2\left\{\Psi\left[\beta+\psi(x)\right],a\right\}$$

Le premier membre étant indépendant de β et la fonction Ψ étant monotone, on en déduira que $\sigma_2(x,a)$ ne dépend pas de la première variable x et que, par conséquent, σ doit avoir la forme suivante:

$$\tag{24} \sigma(x,a)=p(x)+\bar{q}(a).$$

---

[18]) Il n'y a qu'un seul intervalle A_i. L'indice i de Ψ est, par conséquent, superflu.

La substitution dans (22) donnera

(25) $$\beta + p(x) = p\left\{\Psi\left[\beta + \psi(x)\right]\right\}.$$

Si l'on prend la dérivée de deux membres par rapport à β on aura

(26) $$1 = p'\left\{\Psi\left[\beta + \psi(x)\right]\right\}\cdot \Psi'\left[\beta + \psi(x)\right].$$

Si l'on y pose $\beta = 0$:

(27) $$1 = p'\left\{\Psi\left[\psi(x)\right]\right\}\cdot \Psi'\left[\psi(x)\right]$$

et que l'on se rappelle que ψ est l'inverse de Ψ on aura

(28) $p'(x) = \psi'(x)$, d'où

(29) $p(x) = \psi(x) + a$ (a est une constante).

Si l'on pose maintenant

(30) $$q(\alpha) = a + \bar{q}(\alpha)$$

on obtient

(31) $$\sigma(x, \alpha) = \psi(x) + q(\alpha),$$

ce qui donne après la substitution dans la première des formules (19):

(32) $$\Gamma(x, \alpha, \beta) = \Psi\left\{\beta + \psi(x) + q(\alpha)\right\}, \qquad x \in E_0.$$

La substitution de cette expression de $\Gamma(x, \alpha, \beta)$ dans (9) nous permettra d'obtenir $q(\alpha)$:

(33) $$\left|\begin{aligned} &\Psi\left\{\beta_3 + 3\,\alpha_2\beta_2 + \alpha_3 + \psi(x) + q(\alpha_2 + \beta_2)\right\} = \\ &= \Psi\left\{\beta_3 + \psi\,\Psi\left[\alpha_3 + \psi(x) + q(\alpha_2)\right] + q(\beta_2)\right\} = \\ &= \Psi\left\{\beta_3 + \alpha_3 + \psi(x) + q(\alpha_2) + q(\beta_2)\right\}.\end{aligned}\right.$$

Il s'ensuit, à cause de la monotonie de la fonction Ψ, que:

(34) $$q(\alpha_2 + \beta_2) + 3\,\alpha_2\beta_2 = q(\alpha_2) + q(\beta_2).$$

La dernière équation fonctionnelle est facile à résoudre. Après la différentiation par rapport à α_2 on obtient:

(35) $$q'(\alpha_2 + \beta_2) + 3\,\beta_2 = q'(\alpha_2),$$

ce qui donne pour $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = \alpha$:

(36) $$q'(\alpha) + 3\alpha = q'(0).$$

Il en résulte après l'intégration:

(37) $$q(\alpha) = -\tfrac{3}{2}\alpha^2 + q'(0)\alpha + b \quad (b \text{ une constante}).$$

De (34) découle immédiatement que $q(0) = 0$, ce qui a pour conséquence

(38) $$b = 0$$

On doit donc avoir:

(39) $$q(\alpha) = -\tfrac{3}{2}\alpha^2 + c\cdot\alpha,$$

où c est écrit à la place de $q'(0)$. Finalement nous arrivons à

(40) $$\Gamma(x, \alpha, \beta) = \Psi\left\{\beta - \tfrac{3}{2}\alpha^2 + c\alpha + \psi(x)\right\}.$$

La fonction f doit être maintenant exprimée à l'aide de la fonction Γ. Dans ce but nous poserons

(41) $$\mu(x, \alpha) = f(x, \alpha, 0, 0).$$

Si l'on porte $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ dans (3) on aura pour μ la relation suivante:

(42) $$\mu(x, \alpha_1 \cdot \beta_1) = \mu\left\{\mu(x, \alpha_1), \beta_1\right\},$$

qui représente précisément notre équation fonctionnelle des objets différentiels de première classe. Posons dans l'équation (3) d'abord $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ et ensuite $\alpha_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = 0$. On aura:

(43) $$\begin{cases} f(x, \alpha_1, \alpha_1^2\beta_2, \alpha_1^3\beta_3) = \Gamma\left\{\mu(x, \alpha_1), \beta_2, \beta_3\right\} \\ f(x, \beta_1, \alpha_2\beta_1, \alpha_3\beta_1) = \mu\left\{\Gamma(x, \alpha_2, \alpha_3), \beta_1\right\}. \end{cases}$$

On en déduira par des substitutions convenables des variables:

(44) $$\begin{cases} f(x, \alpha, \beta, \gamma) = \Gamma\left\{\mu(x, \alpha), \dfrac{\beta}{\alpha^2}, \dfrac{\gamma}{\alpha^3}\right\} \\ f(x, \alpha, \beta, \gamma) = \mu\left\{\Gamma\left(x, \dfrac{\beta}{\alpha}, \dfrac{\gamma}{\alpha}\right), \alpha\right\}. \end{cases}$$

Nous savons d'une de nos recherches antérieures [19]) que l'on a pour μ soit l'identité:

(45) $$\mu(x,\alpha) \equiv x \text{ pour tous les } x \in E_0 \text{ et } \alpha > 0,$$

soit la formule:

(46) $$x \in A^*, \alpha > 0 \supset \mu(x,\alpha) = \Phi\left[\alpha \cdot \varphi(x)\right]$$

valable dans un intervalle partiel de E_0 (nous l'avons désigné par A^*), où Φ est une fonction monotone dans A^* et φ l'inverse de cette fonction.

Nous allons montrer que (45) ne peut pas avor lieu dans le cas qui nous occupe à présent. La supposition (45) conduirait, à cause de (44), à l'identité:

(47) $$\Gamma\left(x, \frac{\beta}{\alpha^2}, \frac{\gamma}{\alpha^3}\right) \equiv \Gamma\left(x, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}\right) \text{ pour tous les } \alpha > 0,$$

et par suite, à cause de (40), à l'identité:

(48) $$\frac{\gamma}{\alpha^3} - \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^4} + c\frac{\beta}{\alpha^2} + \psi(x) \equiv \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2} + c\frac{\beta}{\alpha} + \psi(x),$$

ce qui présente manifestement une contradiction. (46) doit donc subsister. Après l'introduction des abréviations:

(49) $$\Lambda(u) = \psi\left[\Phi(u)\right], \quad \lambda(u) = \varphi\left[\Psi(u)\right]$$

(λ est la fonction inverse de Λ) nous obtiendrons de (40), (44) et (46) la relation:

(50) $$\frac{\gamma}{\alpha^3} - \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^4} + c\frac{\beta}{\alpha^2} + \Lambda\left[\alpha \cdot \varphi(x)\right] \equiv \Lambda\left\{\alpha \cdot \lambda\left[\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2} + c\frac{\beta}{\alpha} + \psi(x)\right]\right\},$$

qui doit être satisfaite pour tous les $x \in A^*$, pour tous les β et γ et pour tous les $\alpha > 0$. Nous obtiendrons de là en particulier (pour $\beta = 0$):

(51) $$\frac{\gamma}{\alpha^3} + \Lambda\left[\alpha \cdot \varphi(x)\right] \equiv \Lambda\left\{\alpha \cdot \lambda\left[\frac{\gamma}{\alpha} + \psi(x)\right]\right\}.$$

Si l'on différentie cette relation par rapport à γ et que l'on y pose ensuite $\gamma = 0$, on aura

(52) $$\frac{1}{\alpha_3} \equiv \Lambda'\left\{\alpha \cdot \lambda\left[\psi(x)\right]\right\} \cdot \lambda'\left[\psi(x)\right].$$

---

[19]) l. c. [11]).

Fixons maintenant une valeur de $x=\bar{x}$ dans l'intervalle Δ^*, On obtiendra alors de (52):

(53) $$\Lambda'(u) = -\frac{2d}{u^3} \qquad \text{pour tous les } u>0.$$

où d est une constante $\left(d = -\frac{\lambda^3\left[\psi(\bar{x})\right]}{2\lambda'\left[\psi(\bar{x})\right]}\right)$.

On en tire, en intégrant:

(54) $$\Lambda(u) = \frac{d}{u^2} + e \qquad (e \text{ — une constante}).$$

On en déduit encore de (49) et (54):

(55) $$\psi(x) = \frac{d}{\varphi^2(x)} + e.$$

Nous affirmons maintenant que

(56) $$c = 0.$$

En effet, si l'on pose dans (50): $\gamma=0$, on aura, en diférentiant par rapport à β et en faisant ensuite $\beta=0$:

(57) $$\frac{c}{\alpha^2} = \Lambda'\left\{\alpha\cdot\lambda\left[\psi(x)\right]\right\}\cdot\lambda'\left[\psi(x)\right]\cdot c.$$

Si c était différent de zéro, la dernière relation donnerait

(58) $$\frac{1}{\alpha^2} = \Lambda'\left\{\alpha\cdot\lambda\left[\psi(x)\right]\right\}\cdot\lambda'\left[\psi(x)\right],$$

ce qui, avec (52), aboutirait à une contradiction $\left[\frac{1}{\alpha^3} = \frac{1}{\alpha^2} \text{ pour tous les } \alpha>0!\right]$. L'égalité (56) se trouve ainsi démontrée. Si l'on tient maintenant compte de (55) et (56), on obtient de (44) et de (40):

(59) $$f(x,\alpha,\beta,\gamma) = \Psi\left\{\frac{\gamma}{\alpha^3} - \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^4} + \frac{\psi(x)-e}{\alpha^2} + e\right\}.$$

Introduisons à la place de Ψ une nouvelle fonction Ψ^* définie par la formule:

(60) $$\Psi^*(u) = \Psi(u+e).$$

Dans ce cas on aura pour l'inverse ψ^* de Ψ^*:

(61) $$\psi^*(x) = \psi(x) - e.$$

L'équation (59) prendra, par conséquent, la forme suivante:

(62) $$\boxed{f(x,a,\beta,\gamma) = \Psi^*\left\{\frac{\gamma}{a^3} - \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{a^4} + \frac{\psi^*(x)}{a^2}\right\}}.$$

Cette formule subsiste en tout cas pour tous les $x \in A^*$, pour tous les $a > 0$ et pour tous les β, γ.

Nous affirmons qu'elle l'est aussi pour tous les $a < 0$. Pour le démontrer nous poserons:

(63) $$\nu(x) = \mu(x, -1)$$

et nous ferons remarquer que les formules (44) ainsi que la formule (40), écrite sous la forme:

(64) $$\Gamma(x,a,\beta) = \Psi^*\left\{\beta - \tfrac{3}{2}a^2 + \psi^*(x)\right\}$$

conservent leur sens aussi pour $a < 0$. Si l'on pose dans (44) $a = -1$ et si l'on compare les résultats obtenus, on aura, en prenant en considération (64):

(65) $$\Psi^*\left[p + \omega(x)\right] \equiv \nu\left\{\Psi^*\left[p + \psi^*(x)\right]\right\},$$

où l'on a écrit pour abrèger p au lieu de $(-\gamma - \frac{3}{2}\beta^2)$ et $\omega(x)$ à la place de $\psi^*\left[\nu(x)\right]$. La relation (65) est une identité par rapport à p et x. En appliquant aux deux membres de celle-ci l'opérateur ψ^*, on aura:

(66) $$p + \omega(x) \equiv \omega\left\{\Psi^*\left[p + \psi^*\right]\right\},$$

d'où l'on tire, en différentiant par rapport à p:

(67) $$1 \equiv \omega'\left\{\Psi^*\left[p + \psi^*(x)\right]\right\} \cdot \Psi^{*\prime}\left[p + \psi^*(x)\right].$$

Cela donne pour $p = 0$:

(68) $$\omega'(x) \equiv \psi^{*\prime}(x),$$

ou bien

(69) $$\omega(x) = \psi^*(x) + m \qquad (m \text{ — une constante}).$$

Si l'on pose dans (65) $p=0$, on obtient, en tenant compte de (69):

(70) $$\Psi^*\{m+\psi^*(x)\}=\nu(x).$$

La fonction $\nu(x)$ satisfait, comme on le sait [20]), à l'identité:

(71) $$\nu[\nu(x)]\equiv x.$$

Il s'ensuit de (70) et de (71) que

(72) $$\Psi^*[2m+\psi^*(x)]\equiv x,$$

d'où

(73) $$m=0.$$

(70) et (73) donnent

(74) $$\nu(x)\equiv x.$$

D'autre part on a

(75) $$\mu(x,-\alpha)=\nu\{\mu(x,\alpha)\}\,^{21)}.$$

Il résulte de (74) et (75) que la formule (62) est valable pour tous les $\alpha \neq 0$, pour tous les β et γ et les $x \in A^*$.

Nous sommes maintenant à même de démontrer que l'ensemble E doit être d'un seul tenant. Supposons le contraire, c'est à dire que E ne soit pas d'un seul tenant. Désignons par x_1, x_2, x_3 trois points tels que $x_1 \in A^*$, $x_2 \in E$, $x_3 \sim\in E$, x_3 étant à l'intérieur de l'intervalle (x_1, x_2). Il résulte, de la définition même de l'objet géométrique, qu'il existe trois nombres $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ tels que

(76) $$x_2=\Psi^*\left\{\frac{\gamma_0}{\alpha_0^3}-\frac{3}{2}\frac{\beta_0^2}{\alpha_0^4}+\frac{\psi^*(x_1)}{\alpha_0^2}\right\}.$$

On peut supposer que $\alpha_0>0$, car dans le cas contraire, ou pourrait remplacer le système de trois nombres $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ par $(-\alpha_0, \beta_0, -\gamma_0)$. D'autre part, nous avons

(77) $$f(x_1, 1, 0, 0)=x_1.$$

---

[20]) l. c. [11]), l'équation (22).
[21]) l. c. [11]), l'équation (66).

Comme il est possible de passer d'une manière continue du système $(1, 0, 0)$ au système $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ et comme d'autre part la fonction continue f peut atteindre chaque valeur comprise entre x_1 et x_2, et par conséquent aussi x_3, on arrive à une contradiction avec la supposition de tout à l'heure $(\alpha_0 > 0)$. E doit donc se réduire à l'intervalle E_0. Il nous reste à montrer que la formule (62) est applicable non seulement à tous les x de A^* mais aussi à tous les x de l'intervalle E_0. Dans ce but, remarquons d'abord que l'intervalle E_0 renferme juste un point singulier de la fonction $\mu(x, \alpha)$, c'est-à-dire celui pour lequel

(78) $$\mu(x_0, \alpha) \equiv x_0 \qquad \text{pour tous les } \alpha.$$

En effet, si x_0 est sur la frontière de l'intervalle A^*, tout en étant à l'intérieur de l'intervalle E_0, nous aurons à cause de la continuité:

(79) $$\lim_{x \to x_0} \mu(x, \alpha) = \lim_{x \to x_0} \Psi^* \left[\frac{\psi^*(x)}{\alpha^2}\right] = \Psi^* \left\{\frac{\psi^*(x_0)}{\alpha^2}\right\}.$$

Si x_0 est un point singulier de la fonction μ, on en concluera que:

(80) $$\psi^*(x_0) = 0$$

et réciproquement. L'ensemble de valeurs de ψ^* étant l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, il en résulte que E_0 renferme juste un nombre x_0 possédant la propriété (80). Il en résulte que E_0 se compose de deux intervalles contigus A^* et A^{**} [22]). Dans le second de ces intervalles A^{**} est valable la formule analogue à celle de (62):

(81) $$f(x, \alpha, \beta, \gamma) = \Psi^{**} \left[\frac{\gamma}{\alpha^3} - \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^4} + \frac{\psi^{**}(x)}{\alpha^2}\right],$$

où Ψ^{**}, comme Ψ^* est déterminé par la relation

(82) $$\Psi^{**}(u) = \Psi(u + \bar{e}), \qquad \bar{e} \text{ est une constante}$$

(notons que $\Psi(u)$ est défini pour u quelconque). Pour $x = x_0$ les deux formules (62) et (81) doivent concorder. Il s'ensuit

---

[22]) l. c. [11]).

que $\psi^{**}(x_0)=0$ et, par conséquent $\Psi^{**}\equiv\Psi^{*}$. Notre question est ainsi complétement résolue.

Réunissons maintenant les résultats que nous avons obtenus.

Les objets „simples" de troisième classe (essentiellement troisième) ont la formule de transformation:

(83) $$\boxed{\Omega_2=\frac{\varphi'''}{(\varphi')^3}-\frac{3}{2}\frac{(\varphi'')^2}{(\varphi')^4}+\frac{\Omega_1}{(\varphi')^2}}\ .$$ [23]

Tous les autres objets sont (sous certaines conditions de régularité simples, que nous avons précisés plus haut) les fonctions monotones au sens strict des objets simples. Ils obéissent alors à la formule de transformation suivante:

(84) $$\Omega_2=\Psi\left\{\frac{\varphi'''}{(\varphi')^3}-\frac{3}{2}\frac{(\varphi'')^2}{(\varphi')^4}+\frac{\psi(\Omega_1)}{(\varphi')^2}\right\},$$

où Ψ est une fonction monotone définie partout et ψ la fonction inverse de Ψ.

Comme à la fin du premier chapitre, nous pouvons maintenant poser la question sur l'interprétation géométrique des objets simples de troisième classe. Malheureusement, aucune analogie n'apparait plus. Nous allons nous occuper de cette question dans un de nos prochains travaux dans lequel nous voulons traiter la question de la possibilité de déterminer une dérivée covariante pour les objets de deuxième classe. Dans une autre de nos futures recherches nous montrerons qu'il ne peut y avoir des objets différentiels purs de la classe supérieure à la troisième.

En terminant, nous remarquons encore une fois, que les formules qui se trouvent dans l'ouvrage de M. Cartan, que nous avons cité plus haut, concordent avec nos formules de transformations des objets *simples* de deuxième et de troisième classe (pages 233 et 267). Le résultat principal du présent

---

[23]) L'équation (83) peut être encore écrite comme suit:

$$\Omega_2=\frac{1}{(\varphi')^2}\left\{\Omega_1+S(\varphi)\right\},$$

où $S(\varphi)$ désigne la dérivée de Schwarz de la fonction φ.

travail consiste, à notre avis, dans ce que, moyennant certaines suppositions de régularité, peu restrictives, nous sommes parvenus à déterminer *tous* les objets différentiels. Le fait très remarquable est que la variété des objets de première classe est plus riche que celle des objets de deux classes supérieures. Les grandeurs „W" et les objets W de SCHOUTEN [24]) ne se trouvent plus parmi les objets de deuxième et de troisième classe.

---

[24]) l. c. [8]).

NOUVELLES MÉTHODES DE RECHERCHE POUR LA DÉTERMINATION DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Par MAURO PICONE, Rome *)

J'ai tout récemment démontré, dans une note[1]) insérée dans les comptes-rendus de l'Académie Rov. des Lincei, un théorème de croissance, concernant la transfomée de LAPLACE à intervalle d'intégration fini. Le théorème est le suivant.

I. *Soit $f(t)$ une fonction, réelle ou complexe, de la variable réelle t, sommable dans l'intervalle fini $(0,T)$ $(T>0)$. Si on a définitivement, lorsque le paramètre (réel) λ tend vers $+\infty$,*

$$\left| e^{\lambda T} \int_0^T e^{-\lambda t} f(t) dt \right| < K \lambda^p,$$

K et p étant deux constantes réelles, $f(t)$ est nulle presque partout dans l'intervalle $(0,T)$.

J'ai introduit avec succès la fonction

$$\int_0^T e^{-\lambda t} f(t)\, dt,$$

évidemment entière de λ, pour le calcul de la solution de certains problèmes concernant les équations linéaires aux dérivées partielles. J'ai appelé cette fonction *„transformée de Laplace de $f(t)$, à intervalle d'intégration fini"*, en la opposant à la trans-

---

*) Conférence faite, le 25 Avril, à la Section cracovienne de la Société Polonaise de Mathématique et, le 28 Avril 1939, à la Section varsovienne.

[1]) Picone, *Nuove determinazioni per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali.* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei dicembre (1938, XVII), v. 23, s. 6ª, pp. 339—348.

formée usuelle

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt,$$

dont l'introduction exige des hypothèses particulières sur l'allure de la fonction $f(t)$ à l'infini et qui n'est pas, en général, une fonction entière de λ.

En utilisant le théorème de croissance énoncé, cette transformée donne des méthodes nouvelles et puissantes de recherche pour la théorie de certaines équations linéaires aux dérivées partielles très générales, ainsi que l'ai montré dans la note citée aux Lincei, à propos des équations en $r+1$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_r, t$,

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{h,k}^{1,r} a_{ihk} \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} \frac{\partial^i u}{\partial t^i} + \sum_{h}^{1,r} b_h \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial^i u}{\partial t^i} + c_i u\right) = f(x_1, x_2, \ldots, x_r, t),$$

du second ordre par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$ et d'ordre n par rapport à t. Les coefficients sont des fonctions arbitraires, dépendant seulement des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Je me propose, à présent, de revenir sur ces méthodes, en considérant des équations de deux variables réelles x, t, du type

(1) $$E[u] \equiv \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} a_{rs}(x) \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial t^s} = f(x, t),$$

x étant variable dans un intervalle ouvert I fini ou infini, d'extrêmes x_1, x_2, et pour $t \geqslant 0$. Les coefficients $a_{rs}(x)$ sont des fonctions données de x, continues en I.

Si $g(x)$ est une fonction positive dans I, nous désignerons par $J(g)$ l'ensemble des points du plan (x, t), tels que x est dans I et $0 \leqslant t \leqslant g(x)$. Nous dirons qu'une fonction des deux variables x, t est régulière par rapport à l'équation (1) dans un ensemble $J(g)$, si elle est finie et continue en $J(g)$, avec toutes ses dérivées partielles qui se présentent dans l'équation et toutes celles qui en peuvent être déduites de celles-ci par dérivation. Nous devrons chercher exclusivement, dans nos problèmes, des solutions de (1) dans un ensemble $J(g)$, qui

soient régulières par rapport a l'équation considérée. Nous les appellerons, tout simplement, *solutions régulières de* (1). Nous nous donnerons en outre, presque toujours, les n conditions initiales pour la fonction u:

(2) $$\left[\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right]_{t=0} = \varphi_s(x), \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1);$$

Alors, si la dérivée $\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial t^s}$, ou une autre dérivée successive à celle-ci, se présente en (1), et si la fonction $f(x, t)$ est continue elle aussi lorsque x varie en I et $t \geqslant 0$, le problème aura évidemment une solution seulement à condition que les $\varphi_s(x)$ soient continues en I avec toutes ses dérivées $\frac{d^r \varphi_s}{dx^r}$.

Nous demanderons, en outre, que la solution u appartienne à une totalité *donnée* Γ de fonctions. Soit Γ_0 la totalité de fonctions, contenant la constante zéro et toutes les différences de deux fonctions arbitraires de Γ. Le théorème d'unicité pour le problème considéré sera démontré, lorsqu'on aura prouvé qu'une solution régulière de l'équation homogène

(1^0) $$E[u] \equiv \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} a_{rs}(x) \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x_r \partial t^s} = 0,$$

vérifiant les conditions initiales homogènes

(2^0) $$\left[\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right]_{t=0} = 0, \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1)$$ [2]),

et appartenant à la classe Γ_0, doit nécessairement être égale à zéro.

1. Un théorème général d'unicité. Soit $T(x)$ une fonction de x, positive en I, régulière par rapport à l'équation (1). On déduit de (1), pour x en I,

(3) $$\sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} a_{rs}(x) \int_0^T e^{\lambda[T(x)-t]} \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial t^s} dt = \int_0^{T(x)} e^{\lambda[T(x)-t]} f(x, t)\, dt.$$

---

[2]) Ici et dans la suite, si nous désignons par (N) une équation, nous désignons par (N_0) l'équation qu'on en obtient, en substituant le second membre par zéro.

Les intégrations par parties convenables, donnent successivement pour $s \geqslant 1$, en tenant compte des (2) et en supposant la u régulière en $J(T)$,

$$\int_0^T e^{\lambda(T-t)} \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial t^s} dt =$$

$$= \lambda^s \int_0^T e^{\lambda(T-t)} \frac{\partial^r u}{\partial x^r} dt + \sum_{\sigma=0}^{s-1} \lambda^\sigma \left[\frac{\partial^{r+s-1-\sigma} u}{\partial x^r \partial t^{s-1-\sigma}} \right]_{t=T(x)} - e^{\lambda T} \sum_{\sigma=0}^{s-1} \lambda^\sigma \frac{d^r \varphi_{s-1-\sigma}}{dx^r},$$

et la (3) fournit par conséquent

$$(4) \qquad \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} \lambda^s a_{rs}(x) \int_0^T e^{\lambda[T-t]} \frac{\partial^r u}{\partial x^r} dt = \pi_{n-1}(x, \lambda) + \Phi_{n-1}(x, \lambda) + $$
$$+ f^*(x, \lambda).$$

$$\pi_{n-1}(x, \lambda) = - \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n-1} \left[\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial t^s} \right]_{t=T(x)} \sum_{\sigma=s}^{n-1} a_{r, \sigma+1} \lambda^{\sigma-s}$$

est une fonction inconnue de x, continue en I, et un polynome de λ du degré $n-1$ au plus, dépendant d'une façon bien connue de u et d'un certain nombre de dérivées partielles de u (les dérivations par rapport à t étant en nombre de $n-1$ au plus) calculées pour $t = T(x)$.

$$\Phi_{n-1}(x, \lambda) = e^{\lambda T} \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{d^r \varphi_s}{dx^r} \sum_{\sigma=s}^{n-1} a_{r, \sigma+1} \lambda^{\sigma-s}$$

est une fonction donnée de x, continue en I, et un polynome de λ du degré $n-1$ au plus. Enfin

$$f^*(x, \lambda) = \int_0^{T(x)} e^{\lambda[T(x)-t]} f(x, t) dt.$$

Posons maintenant

$$(5) \qquad \int_0^{T(x)} e^{\lambda[T(x)-t]} u(x, t) dt = u^*(x, \lambda),$$

et dérivons successivement cette identité r fois par rapport a x, ce qui donne

$$(6) \qquad \int_0^T e^{\lambda(T-t)} \frac{\partial^r u}{\partial x^r} dt = \sum_{k=0}^{r} \Theta_{r,r-k} \frac{d^k u^*}{dx^k} + U_{r-1}(x,\lambda).$$

Les $\Theta_{r,r-k}(x,\lambda)$ sont des fonctions déterminées et bien connues de x et de λ, continues pour x en I, et polynomes de λ, du degré $r-k$ au plus, dépendantes exclusivement de $T(x)$; les $U_{r-1}(x,\lambda)$ sont des fonctions inconnues, continues pour x en I et polynomes en λ de degré $r-1$ au plus qui s'expriment par $T(x)$, par $u(x,T)$ et par un certain nombre de dérivées partielles de $u(x,T)$, calculées pour $t=T(x)$. On a

$$\Theta_{r0} = 1,$$

$$\Theta_{r1} = -\binom{r}{1} T'\lambda,$$

$$\Theta_{r2} = \binom{r}{2}\left(\lambda^2 T'^2 - \lambda T''\right),$$

$$\Theta_{r3} = -\binom{r}{3}\left(\lambda^3 T'^3 - 3\lambda^2 T'T'' + \lambda T'''\right),$$

. . . .

Si on prend pour $T(x)$ une constante, on a évidemment $\Theta_{rs} \equiv 0$, pour $s \geqslant 1$, et $U_{r-1} \equiv 0$.

Posons $U_{-1} \equiv 0$ et introduisons (6) en (4). On trouve

$$\sum_{s=0}^{n} \lambda^s \sum_{r=0}^{m} \sum_{k=0}^{r} a_{rs} \Theta_{r,r-k} \frac{d^k u^*}{dx^k} = \pi_{n-1} - \sum_{s=0}^{n} \lambda^s \sum_{r=0}^{m} a_{rs} u_{r-1} + \Phi_{n-1} + f^*.$$

De sorte que la transformée u^* de u, définie par (5), qui sera encore appelé „*transformée de Laplace*" de u, doit satisfaire à l'équation différentielle ordinaire d'ordre m suivante:

$$(7) \qquad \sum_{k=0}^{m} A_k(x,\lambda) \frac{d^k u^*}{dx^k} = V(x,\lambda) + \Phi_{n-1}(x,\lambda) + f^*(x,\lambda),$$

avec

$$A_k(x,\lambda) = \sum_{s=0}^{n} \lambda^s \sum_{r=k}^{m} a_{rs}(x)\,\Theta_{r,r-k}(x,\lambda),$$

$$V(x,\lambda) = \pi_{n-1}(x,\lambda) - \sum_{s=0}^{n} \lambda^s \sum_{r=0}^{m} a_{rs}(x)\,U_{r-1}(x,\lambda).$$

Chaque coefficient $A_k(x,\lambda)$ dans (7) est une fonction bien connue, continue pour x en I, et un polynome en λ du degré $n+m-k$ au plus. Chaque $A_k(x,\lambda)$ dépend de $T(x)$ et des coefficients $a_{rs}(x)$ de (1). La fonction inconnue $V(x,\lambda)$ est continue pour x en I et un polynome en λ du degré $n+m-1$ au plus; elle a une expression bien connue contenant $T(x)$, les coefficients de (1), $u(x,T)$ et un certain nombre de dérivées partielles de $u(x,t)$, calculées pour $t=T(x)$.

Cela étant, observons que, pour toute solution de (10) vérifiant (20), on a $\Phi_{n-1} \equiv f^* \equiv 0$. Nous pouvons donc énoncer le théorème général d'unicité suivant:

II. *Supposons qu'il soit possible de déterminer une fonction $T(x)$, régulière et positive en I, satisfaisant à la condition suivante. Si u est une solution quelconque de* (10), *régulière en $J(T)$, vérifiant les conditions initiales* (20) *et appartenant à la totalité Γ_0, sa transformée u^* satisfait en I, en tenant compte de l'équation*

$$\sum_{k=0}^{m} A_k(x,\lambda)\,\frac{d^k u^*}{dx^k} = V(x,\lambda), \tag{8}$$

à une limitation telle que

$$|u^*(x,\lambda)| < K(x)\,\lambda^{p(x)}, \tag{9}$$

tout au moins pour les valeurs de λ positives et suffisamment élevées, $K(x)$ et $p(x)$ étant des fonctions réelles et finies de x. Alors, dans l'ensemble $J(T)$ du plan (x,t), lieu des points tels que

$$x \text{ est en } I, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T(x),$$

il ne peut exister plus qu'une solution régulière de (1), *vérifiant* (2) *et appartenant à la totalité Γ.*

En effet, (9) c'est-à-dire

$$\left| e^{\lambda T(x)} \int_0^{T(x)} e^{-\lambda t} u(x,t)\, dt \right| < K(x)\, \lambda^{p(x)},$$

étant définitivement vérifiée pour $\lambda \to \infty$, on en déduit du théorème I, pour chaque point x de I,

$$u(x,t) = 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T(x).$$

2. Un théorème général d'unicité pour les équations du second ordre. D'après le théorème énoncé, celui d'unicité pour l'équation aux dérivées partielles (1), d'ordre $m+n$, vient donc à dépendre de la possibilité de parvenir, pour la solution u^* de l'équation différentielle (8), ordinaire d'ordre m, à une formule de majoration du type (9). On voit bien la grande portée du résultat ainsi obtenu, le terme majorant dans (9) étant une puissance de λ, d'accord avec le fait que les coefficients et le terme connu de (8) sont des polynomes de λ. Nous le reconnaîtrons parfaitement, en considérant le cas particulier de l'équation du second ordre:

$$(10) \quad a_{20} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\, a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} + a_{02} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_{10} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{01} \frac{\partial u}{\partial t} + a_{00}\, u = f(x,t),$$

dont l'équation (7) correspondante est

$$(11) \quad \begin{gathered} a_{20} \frac{d^2 u^*}{dx^2} + A_1(x, \lambda) \frac{du^*}{dx} + A_0(x, \lambda)\, u^* = V(x, \lambda) + \\ + \Phi(x, \lambda) + f^*(x, \lambda), \end{gathered}$$

avec

$$A_1(x, \lambda) = a_{10} + 2\,(a_{11} - a_{20}\, T')\, \lambda,$$

$$A_0(x, \lambda) = a_{00} + (a_{01} - a_{10}\, T' - a_{20}\, T'')\, \lambda + \left(a_{02} - 2 a_{11}\, T' + a_{20}\, T'^2\right) \lambda^2,$$

$$\Phi(x, \lambda) = \left[a_{02}\, \varphi_1 + 2\, a_{11}\, \varphi_0 + (a_{01} + a_{02}\, \lambda)\, \varphi_0\right] e^{\lambda T};$$

et, en posant

$$u(x, T) = X_0(x), \qquad u_t(x, T) = X_1(x),$$

avec

$$V(x, \lambda) = -\left[a_{01} - a_{10} T' - a_{20} T'' + (a_{02} - 2a_{11} T' + a_{20} T'^2)\lambda\right] X_0 -$$

(12)

$$-2(a_{11} - a_{20} T'') X_0' - (a_{02} - 2a_{11} T' + a_{20} T'^2) X_1 .$$

Nous y voyons apparaître l'expression $a_{02} - 2a_{11} T' + a_{20} T'^2$ qui, égalée à zéro, donne l'équation différentielle des caractéristiques de l'équation (10).

Maintenant, pour les solutions régulières d'une équation différentielle linéaire ordinaire du second ordre

(13) $$a_2(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_0(x) u = v(x),$$

à coefficients partout finis dans l'intervalle $I(x_1, x_2)$, on peut affirmer, par exemple, le théorème de majoration suivant.

III. *Soient μ et M deux nombres positifs tels que, dans l'intervalle I,*

(14) $$a_2(x) \geqslant 0, \quad a_0(x) \leqslant -\mu, \quad |v(x)| \leqslant M,$$

ou

(15) $$a_2(x) \equiv 0, \quad |a_0(x)| \geqslant \mu, \quad |v(x)| \leqslant M.$$

Toute solution u, régulière en I, de l'équation (12), *vérifiant les conditions*

$$\lim_{x \to x_1} u(x) = \lim_{x \to x_2} u(x) = 0,$$

est telle que

(16) $$|u(x)| \leqslant \frac{M}{\mu},$$

en I.

En effet, si $a(x)$ prend au point ξ le minimum et au point η le maximum de ses valeurs en I, on déduit de (13) et (14)

$$a_0(\xi) u(\xi) \leqslant v(\xi), \quad a_0(\eta) u(\eta) \geqslant v(\eta),$$

donc

$$\frac{v(\xi)}{a_0(\xi)} \leqslant u(\xi) \leqslant u(\eta) \leqslant \frac{v(\eta)}{a_0(\eta)},$$

et, de (13) et (15),

$$\frac{v(\xi)}{a_0(\xi)} = u(\xi) \leqslant u(\eta) = \frac{v(\eta)}{a_0(\eta)}.$$

Cela étant, nous voulons considérer, pour l'équation (10), les problèmes d'intégration suivants:

Problème A. *Les coefficients de* (10) *soient continus dans l'intervalle fini et fermé* $I+FI$. *Soit* $T(x)$ *une fonction de classe* C'' [3]) *en* $I+FI$ *et positive en* I. *Posons* $T(x_i)=t_i$ $(i=1,2)$. *Dans chaque intervalle fermé* $(0,t_i)$, *soit donnée une fonction* $u_i(t)$ *continue et soit* $t_i>0$. *Si* Γ *est la totalité des fonctions de la classe* C' *en* $J(T)+FJ(T)$, *satisfaisant aux conditions*

$$(17)\qquad \begin{cases} u(x_1,t)=u_1(t), & \text{si } t_1>0, \quad \text{pour } 0\leqslant t\leqslant t_1, \\ u(x_2,t)=u_2(t), & \text{si } t_2>0, \quad \text{pour } 0\leqslant t\leqslant t_2, \end{cases}$$

on se propose de construire une solution de (10), *régulière en* $J(T)$, *appartenant à* Γ *et vérifiant les conditions initiales*

$$(18)\qquad u(x,0)=\varphi_0(x), \quad u_t(x,0)=\varphi_1(x).$$

Problème B. *Dans les hypothèses et dans la classe* Γ *considérées pour le problème précédent, soit* $a_{02}(x)\equiv 0$. *L'équation* (10) *s'écrit alors*

$$(19)\qquad a_{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+a_{10}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{01}\frac{\partial u}{\partial t}+a_{00}u=f(x,t)$$

et on a

$$\Phi(x,\lambda)=(2a_{11}\varphi_0'+a_{01}\varphi_0)\,e^{\lambda T}.$$

On demande la construction d'une solution de cette équation, régulière en $J(T)$, *appartenant à* Γ *et vérifiant la condition initiale*

$$(20)\qquad \left[2a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{01}u\right]_{t=0.}=\Psi(x).$$

---

[3]) E étant un ensemble dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, nous disons qu'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ est de la classe $C^{(n)}$ en E, si elle est continue en E avec ses dérivées partielles jusqu'à celles d'ordre n incluses.

La totalité Γ_0 est formée par toutes les fonctions de la classe C' en $J(T)+FJ(T)$, satisfaisant aux conditions

$$(17^0) \qquad \begin{cases} u(x_1,t)=0\,, & \text{si } t_1>0\,, \quad \text{pour } 0\leqslant t\leqslant t_1\,,\\ u(x_2,t)=0, & \text{si } t_2>0\,, \quad \text{pour } 0\leqslant t\leqslant t_2\,. \end{cases}$$

Soit dans le problème A comme dans le problème B, si $u^*(x,\lambda)$ est la transformée d'une solution régulière $u(x,t)$ de (10_0) ou de (19_0), vérifiant les conditions initiales (18_0) ou (20_0), cette transformée résulte, pour chaque valeur de λ, solution de l'équation

$$(21) \qquad a_{20}\frac{d^2u^*}{dx^2}+A_1(x,\lambda)\frac{du^*}{dx}+A_0(x,\lambda)\,u^*=V(x,\lambda).$$

Il existe un nombre positif K tel qu'il résulte définitivement. pour $\lambda\to+\infty$,

$$|V(x,\lambda)|\leqslant K\lambda\,;$$

et on a, en outre,

$$\lim_{x\to x_1} u^*(x,\lambda)=\lim_{x\to x_2} u^*(x,\lambda)=0\,,$$

car dans l'intégrale (5) la fonction à intégrer est nulle lorsque $T(x_i)>0$ et l'intervalle d'intégration est nul lorsque $T(x_i)=0$. On en déduit du théorème III que, si μ est un certain nombre positif et si l'on a définitivement en I, pour $\lambda\to+\infty$,

$$(22) \qquad \begin{cases} A_0(x,\lambda)\leqslant-\mu\,, & \text{pour } a_{20}(x)\geqslant 0 \quad \text{en } I,\\ |A_0(x,\lambda)|>\mu\,, & \text{pour } a_{20}(x)\equiv 0 \quad \text{en } I, \end{cases}$$

alors

$$\left|u^*(x,\lambda)\right|\leqslant\frac{K}{\mu}\lambda,$$

donc (théor. I) $u(x,t)\equiv 0$ en $J(T)$. Le théorème suivant d'unicité est ainsi démontré:

IV. *Si, μ étant un nombre positif, l'une ou l'autre des* (22) *est vérifiée en I, pour $\lambda\to+\infty$, le problème A d'intégration pour l'équation* (10) *et le problème B pour* (19), *n'ont plus qu'une solution.*

On voit que ni l'une ni l'autre des relations (22) peut se vérifier, si l'équation (10) est elliptique pour certaines valeurs de I.

En effet si, pour un certain x, on a $a_{02}a_{20}-a_{11}^2>0$, la relation $a_{20}=0$ est impossible et, si $a_{20}>0$, on aura toujours

$$a_{20}-2a_{11}T'+a_{20}T'^2>0,$$

donc

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_0(x,\lambda)=+\infty.$$

Le théorème d'unicité ne peut donc pas s'appliquer aux équations elliptiques. Pour en déduire certains corollaires, *en supposant toujours* $a_{20}(x)\geqslant 0$ *en* I, nous pourrons donc nous borner à considérer les cas suivants:

1er cas. L'équation (10) est hyperbolique-parabolique, c'est-à-dire on a, en I,

$$a_{20}a_{02}-a_{11}^2\leqslant 0.$$

2ème cas. L'équation (10) est totalement hyperbolique c'est-à-dire on a, en $I+FI$,

$$a_{20}a_{02}-a_{11}^2<0.$$

3ème cas. L'équation (10) est totalement parabolique c'est-à-dire on a, en I,

$$a_{20}a_{02}-a_{11}^2=0.$$

4ème cas. L'équation (10) est du premier ordre, c'est-à-dire on a, en I,

$$a_{20}\equiv a_{02}\equiv a_{11}\equiv 0.$$

3. Équations hyperboliques-paraboliques. Posons $T(x)\equiv\tau$, τ étant une constante positive. On a alors

$$A_0(x,\lambda)=a_{00}+a_{01}\lambda+a_{02}\lambda^2,$$

donc:

V. *Si* $a_{02}(x)<0$ *en* $I+FI$, *pour* $T(x)\equiv\tau$ *(constante positive) il n'existe plus qu'une solution du problème A dans le rectangle* $J(\tau)+FJ(\tau)$. *Si* $a_{02}(x)\equiv 0$ *et* $a_{01}(x)<0$, *ou bien*

$a_{02}(x) \equiv a_{01}(x) \equiv 0$, $a_{00} < 0$, *en* $I+FI$, *il ne peut exister plus qu'une solution du problème B dans le même rectangle.*

4. Équations totalement hyperboliques. Supposons en premier lieu $a_{20}(x) > 0$ en $I+FI$. Soient $\alpha(x)$, $\beta(x)$ les deux racines (réelles et distinctes) de l'équation du second degré en T':

$$a_{20} T'^2 - 2a_{11} T' + a_{02} = 0.$$

Soit toujours $\alpha(x)$ la plus petite de ces deux racines. Les deux fonctions $\alpha(x)$, $\beta(x)$ sont finies et continues en $I+FI$. Lorsque le point (x_0, t_0) varie dans la demi-bande $S(x_1 \leqslant x \leqslant x_2, t \geqslant 0)$, les deux courbes respectivement d'équations

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \alpha(\xi) d\xi, \quad t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \beta(\xi) d\xi,$$

parcourent le système doublement infini des caractéristiques de l'équation (10). Désignons par (α) le système parcouru par la première courbe, par (β) celui parcouru par la deuxième. Deux courbes de même système (α) ou du même système (β) ne se rencontrent évidemment pas, et une courbe appartenant à un de ces systèmes, ne peut avoir plus qu'un point commun avec une courbe quelconque appartenant à l'autre système. Maintenant donnons nous les deux points $P_1(x_1, \tau_1)$ et $P_2(x_2, \tau_2)$ sur la frontière de la demi-bande S. La caractéristique du système (β) passant par P_1 rencontrera la caractéristique du système (α) passant par P_2, en un point $P_0(x_0, t_0)$ *intérieur* à S, si et seulement si on a

$$\int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)\, dx < \tau_2 - \tau_1 < \int_{x_1}^{x_2} \beta(x)\, dx. \tag{23}$$

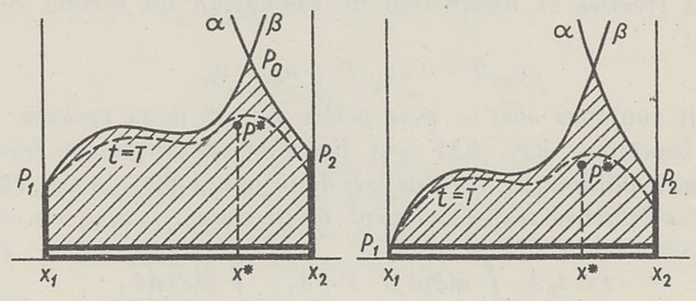
Cette condition étant satisfaite, posons

$$\begin{cases} \gamma(x) = \tau_1 + \displaystyle\int_{x_1}^{x} \beta(\xi)\, d\xi, & \text{pour } x_1 < x \leqslant x_0, \\ \gamma(x) = \tau_2 - \displaystyle\int_{x}^{x_2} \alpha(\xi)\, d\xi, & \text{pour } x_0 \leqslant x < x_2, \end{cases}$$

et supposons

$$\gamma(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x_1 < x < x_2, \tag{24}$$

(ce qui arrivera certainement s'il est toujours $\beta(x) > 0$ et $\alpha(x) < 0$). Le domaine $J(\gamma) + FJ(\gamma)$ sera limité (voir les fig. 1, 2 et 3) par les deux caractéristiques indiquées, qui passent par P_1 et P_2 et par les droites $x = x_1$, $x = x_2$, $t = 0$. Cela étant, on peut démontrer le théorème suivant:



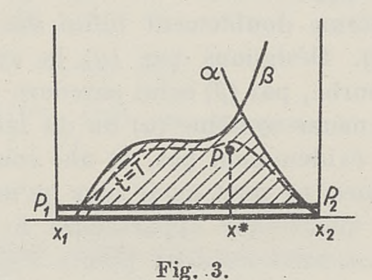


Fig. 3.

VI. *Deux quantités τ_1 et τ_2 vérifiant les* (23) *et* (24), *soient arbitrairement données. Soit Γ la totalité des fonctions de la classe C' dans le domaine $D = J(\gamma) + FJ(\gamma)$, satisfaisant aux conditions*

$$(25) \qquad \begin{cases} u(x_1, t) = u_1(t), & \text{si } \tau_1 > 0, \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \\ u(x_2, t) = u_2(t), & \text{si } \tau_2 > 0, \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \tau_2. \end{cases}$$

Il ne peut exister plus qu'une solution de la (10), *régulière en $J(\gamma)$, appartenant à la totalité Γ et vérifiant les conditions initiales* (18) *).

---

*) La ligne marquée par laquelle, dans les figures 1 et 2, sont tracés les segments verticaux le long de la frontière de S, signifie que tels segments portent une donnée de la solution et une seule. La double-ligne marquée par laquelle, dans les figures 1, 2 et 3, sont tracés les segments horizontaux le long de la frontière de S, signifie que tels segments portent deux données de la solution et deux seules.

Soit $u(x,t)$ une solution régulière de la (10), appartenant à la totalité Γ_0 et vérifiant les conditions initiales (18_0). Je dis qu'il est $u(x^*,t^*)=0$, quel que soit le point (x^*,t^*) intérieur à D. En effet, si par exemple $\tau_1>0$ et $\tau_2>0$, il est possible de construire une courbe $t=T(x)$ (voir fig. 1) pour laquelle la fonction $T(x)$ soit de la classe C'' en $I+FI$ et satisfasse les conditions suivantes: elle soit positive en I, soit

$$a_{02}-2\,a_{11}\,T'+a_{20}\,T'^2<0\,, \tag{26}$$

en $I+FI$, c'est-à-dire

$$\alpha(x)<T'(x)<\beta(x)\,,$$

et l'on ait

$$t_1=T(x_1)\leqslant\tau_1\,,\quad t_2=T(x_2)\leqslant\tau_2\,,\quad T(x^*)>t^*.$$

Relativement au domaine $J(T)+FJ(T)$, les hypothèses du théorème IV d'unicité pour le problème A concernant la fonction $T(x)$, sont évidemment vérifiées. On a donc $u(x,t)\equiv 0$ en ce domaine et pourtant $u(x^*,t^*)=0$. De même, en ayant recours au théorème d'unicité IV pour le probleme B, on démontre que:

VII. *Si* $a_{02}(x)\equiv 0$ *et si* (23) *et* (24) *sont vérifiées, il ne peut exister plus qu'une solution de* (19), *régulière en* $J(\gamma)$, *appartenant à la classe* Γ *considérée au théor. précédent, et vérifiant la condition initiale* (20).

Si $a_{02}(x)\equiv 0$, on aura toujours $a_{11}(x)\neq 0$ et si, par exemple, $a_{11}(x)>0$, les caractéristiques (α) sont des droites horizontales, les conditions (23) et (24) se réduisent aux suivantes

$$0<\tau_2-\tau_1<2\int_{x_1}^{x_2}\frac{a_{11}(x)}{a_{20}(x)}\,dx,\quad \tau_2>0,$$

et le domaine $D=J(\gamma)+FJ(\gamma)$ a une des formes représentées par les figg. 4 et 5.

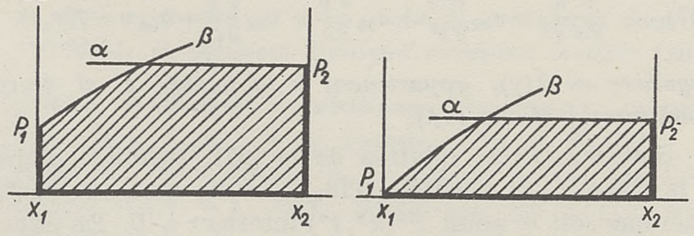


Fig. 4. $(a_{02}\equiv 0,\ a_{11}>0)$ Fig. 5.

Si

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)dx \text{ et } \gamma_1(x) \equiv \tau_1 + \int_{x_1}^{x} \alpha(\xi)d\xi > 0, \text{ pour } x_1 < x < x_2,$$

ou

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{x_1}^{x_2} \beta(x)dx \text{ et } \gamma_2(x) = \tau_1 + \int_{x_1}^{x} \beta(\xi)d\xi > 0, \text{ pour } x_1 < x < x_2,$$

il est facile de démontrer que les théorèmes V et VII, où l'on pose, au lieu du domaine D, dans le premier cas, le domaine $J(\gamma_1) + FJ(\gamma_1)$, dans le deuxième cas, le domaine $J(\gamma_2) + FJ(\gamma_2)$, sont encore valables.

Soit $a_{20}(x) \equiv 0$. Étant alors $a_{11} \neq 0$ en $I + FI$, en divisant les deux membres de l'équation (10) par $2a_{11}$, on peut supposer qu'il soit $2a_{11} \equiv 1$. Nous aurons

$$A_0(x, \lambda) = a_{00} + (a_{01} - a_{02}T')\lambda + (a_{02} - T')\lambda^2,$$

et, par conséquent, le théorème qui suit:

VIII. *Etant donnée la quantité non negative τ, s'il est*

$$\gamma(x) \equiv \tau + \int_{x_1}^{x} a_{02}(\xi)\,d\xi > 0, \text{ pour } x_1 < x < x_2,$$

et Γ est la totalité des fonctions de la classe C' dans le domaine $D \equiv J(\gamma) + FJ(\gamma)$, satisfaisant à l'unique condition (éventuelle)

$$u(x_1, t) = u_1(t), \text{ si } \tau > 0, \text{ pour } 0 \leq t \leq \tau,$$

il ne peut exister plus qu'une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a_{02}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_{10}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}\frac{\partial u}{\partial t} + a_{00}u = f(x, t), \tag{27}$$

régulière en $J(\gamma)$, appartenant à la totalité Γ et vérifiant les conditions initiales (18).

Soit $u(x, t)$ une solution de la (27), régulière, appartenant à la classe Γ_0 et vérifiant (18_0). Je dis qu'il est $u(x^*, t^*) = 0$, quel que soit le point $P^*(x^*, t^*)$ intérieur à D. En effet s'il est, par exemple, $\tau > 0$, il est possible de construire une courbe

$t = T(x)$ (voir fig. 6) pour laquelle $T(x)$ soit de la classe C'' en $I+FI$ *), positive en I et telle que

$$T'(x) < a_{02}(x) \text{ en } I+FI,$$
$$t_1 = T(x_1) \leqslant \tau, \quad T(x_2) = 0, \quad T(x^*) > t^*$$

Relativement au domaine $J(T)+FJ(T)$, les hypothèses du théorème IV d'unicité pour le problème A sont vérifiées et l'on a pourtant $u(x^*, t^*) = 0$.

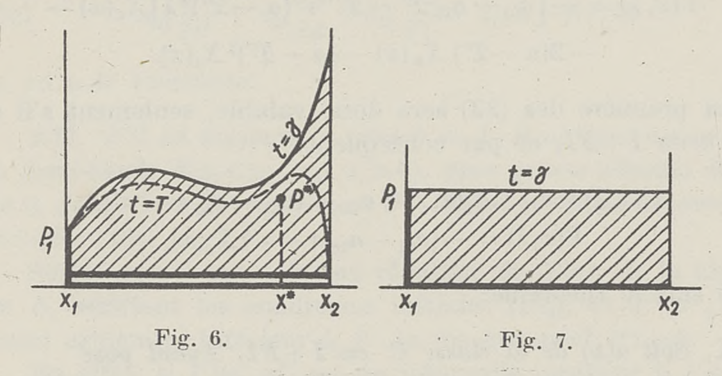


Fig. 6. Fig. 7.

Si $a_{02}(x) \equiv 0$, on a nécessairement $\tau > 0$ et le domaine D est rectangulaire: ses points extrêmes sont $(x_1, 0)$, (x_2, τ). On retombe ainsi dans le théorème bien connu:

IX. *Il ne peut exister dans le domaine rectangulaire D, aux points extremes $(x_1, 0)$ et (x_2, τ) (voir fig. 7), plus qu'une solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a_{10} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{01} \frac{\partial u}{\partial t} + a_{00} u = f(x, t),$$

régulière en $J(\gamma)$, appartenant à la classe Γ, considérée dans le théorème précédent, et vérifiant l'unique condition initiale (20).

5. Équations totalement paraboliques. Supposons, en premier lieu, qu'il soit $a_{20}(x) > 0$ en chaque point de $I+FI$.

Nous pourrons nous limiter à considérer le cas où l'on a identiquement $a_{20}(x) \equiv 1$. Alors, supposant que la (10) soit

*) Il serait suffisant, dans le cas actuel, de supposer $T(x)$ de la classe C'

totalement parabolique, on peut écrire

$$(28)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_{10}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}\frac{\partial u}{\partial t} + a_{00}\,u = f(x,t),$$

avec $a_{11} \equiv a$, et l'on a

$$A_1(x,\lambda) = a_{10} + 2(a - T')\,\lambda,$$
$$A_0(x,\lambda) = a_{00} + (a_{01} - a_{10}\,T' - T'')\,\lambda + (a - T')^2\lambda^2,$$
$$V(x,\lambda) = -\left[a_{01} - a_{10}\,T' - T'' + (a - T')^2\lambda\right]X_0(x) -$$
$$-\,2(a - T')\,X_0'(x) - (a - T')^2 X_1(x).$$

La première des (22) sera donc valable, seulement s'il est $T' \equiv a$ en $I + FI$, et par conséquent:

$$A_1(x,\lambda) = a_{10},\; A_0(x,\lambda) = a_{00} + (a_{01} - a_{10}\,a - a')\,\lambda,$$
$$V(x,\lambda) = -(a_{01} - a_{10}\,a - a')\,X_0(x).$$

Il suit le théorème:

X. *Soit $a(x)$ de la classe C' en $I+FI$. Ayant posé*

$$(29)\qquad T(x) = t_1 + \int_{x_1}^{x} a(\xi)\,d\xi,$$

s'il est $T(x) > 0$ en I, et

$$a_{01} - a_{10}\,a - a' < 0,$$

ou

$$a_{01} - a_{10}\,a - a' \equiv 0,\; a_{00} < 0$$

en $I+FI$, le problème A d'intégration pour (28), *ou le probléme B lorsque $a(x) \equiv 0$, ne peuvent posséder plus qu'une solution.*

Mais, pour $T' \equiv a$, $a_{01} - a_{10}\,a - a' \equiv 0$, il résulte:

$$A_1(x,\lambda) \equiv a_{10},\; A_0(x,\lambda) \equiv a_{00},\; V(x,\lambda) \equiv 0.$$

On a donc le théorème:

XI. *La fonction $T(x)$, positive en I, étant définie par* (29), *soit*

$$a_{01} - a_{10}\,a - a' \equiv 0$$

en I. Si l'unité n'est pas une valeur exceptionnelle du paramètre ν pour les équations

$$\frac{d^2u^*}{dx^2}+a_{10}\frac{du^*}{dx}+\nu a_{00}u^*=0\,,\quad u^*(x_1)=u^*(x_2)=0\,,$$

le problème A d'intégration pour (28) *ne peut posséder plus qu'une solution.*

Soit, en second lieu, $a_{20}(x)\equiv 0$. L'équation (10) s'écrit alors

$$(30)\qquad a_{02}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a_{10}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{01}\frac{\partial u}{\partial t}+a_{00}u=f(x,t),$$

et on a le théorème:

XII. *S'il est toujours* $a_{02}(x)\neq 0$ *en I, il ne peut exister, dans la demi-bande* $S(x_1\leqslant x\leqslant x_2,\ t\geqslant 0)$, *plus qu'une solution de* (30), *de la classe C en S, régulière en* $J(+\infty)$ *et vérifiant les conditions initiales* (18).

Soient $u(x,t)$ une solution régulière de (30_0), de la classe C en S, vérifiant les conditions initiales (18_0), et $P^*(x^*,t^*)$ un point arbitraire intérieur à S. Je dis que $u(x^*,t^*)=0$.

En effet, si $I'(x_1',x_2')$ est un intervalle intérieur à I et contenant le point x^* à son intérieur, il est possible de construire une courbe $t=T(x)$ (voir fig. 8) telle que la fonction

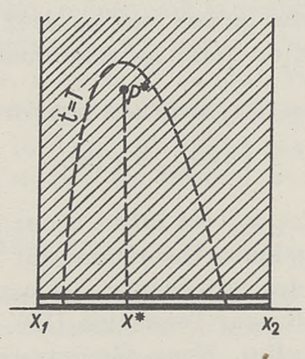


Fig. 8.

$T(x)$ soit de la classe C'' en $I'+FI'$ et que l'on ait

$$T(x_1')=0,\ T(x_2')=0,\ T(x)>0,\ \text{pour } x_1'<x<x_2',$$
$$T(x^*)>t^*.$$

Pour le domaine $J'(T)+FJ'(T)$, les hypothèses du théorème IV d'unicité relativement au problème A d'intégration de l'équation (30), sont vérifiées. On a donc $u(x,t)\equiv 0$ en ce domaine, donc $u(x^*, t^*)=0$.

6. Équations du premier ordre. Considérons l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}+a(x)\frac{\partial u}{\partial t}+b(x)\,u=f(x,t). \tag{31}$$

Pour une solution de (31_0), régulière, vérifiant la condition (20_0), la transformée u^* est une solution de l'équation:

$$\frac{du^*}{dx}+\Big[b+(a-T')\lambda\Big]u^*=-(a-T')\,X_0(x).$$

Donc, pour $T'\equiv a$, on aura $u^*\equiv 0$, si, u^* étant de la classe C en $I+FI$, il soit par exemple $u^*(x_1)=0$. On en déduit le théorème bien connu suivant.

XIII. *Posons*

$$T(x)=t_1+\int_{x_1}^{x}a(\xi)\,d\,\xi.$$

Si $T(x)>0$ pour $x_1<x<x_2$, il ne peut exister, dans le domaine $D=J(T)+FJ(T)$, plus qu'une solution de (31), *régulière en $J(T)$, de la classe C en D, vérifiant les conditions*:

$$u(x_1,t)=u_1(t),\quad \text{si } t_1>0 \text{ pour } 0\leqslant t\leqslant t_1,$$
$$\Big[au\Big]_{t=0}=\Psi(x).$$

7. L'intervalle (x_1, x_2) est infini. Nous indiquerons maintenant brièvement quelques théorèmes, qui s'en déduisent tout à fait rapidement des précédents, concernant les problèmes d'intégration A ou B pour l'équation (10), dans le cas où l'intervalle (x_1, x_2) est infini. Nous démontrerons premièrement le théorème suivant:

XIV. *Soit I l'intervalle $(x_1, +\infty)$, et y soient $a_{20}(x)>0$, $a_{20}(x)\,a_{02}(x)-a_{11}^2(x)<0$ et soit encore l'intégrale divergente, prise dans l'intervalle I, de la plus petite racine $\alpha(x)$ de l'équation*

$$a_{20}T'^2 - 2a_{11}T' + a_{02} = 0, \tag{32}$$

et précisément soit

$$\int_{x_1}^{\infty} a(x)\,dx = -\infty. \tag{33}$$

Si, pour une certaine quantité non négative τ, on a

$$\gamma(x) \equiv \tau_1 + \int_{x_1}^{x} \beta(\zeta)\,d\zeta > 0, \quad \text{pour } x > x_1,$$

et Γ est la totalité des fonctions de la classe C', définies dans le domaine $D \equiv J(\gamma) + FJ(\gamma)$, et satisfaisant à la condition (eventuelle)

$$u(x_1, t) = u_1(t), \quad si\ \tau_1 > 0, \quad pour\ 0 \leqslant t \leqslant \tau_1,$$

alors il ne peut exister plus d'une solution de la (10), *regulière dans $J(\gamma)$, appartenant à la totalité Γ et vérifiant les conditions initiales* (18).

Soit $u(x, t)$ une solution de la (10_0), regulière dans $J(\gamma)$, appartenant à la totalité Γ_0 et vérifiant les conditions initiales (18_0). J'affirme que quel que soit le point $P^*(x^*, t^*)$, intérieur à D, on a $u(x^*, t^*) = 0$. Prenons sur la caractéristique $t = \gamma(x)$ du système (β), ménée par le point (x_1, τ_1), le point P_0 d'abscisse x^* et faisons passer par P_0 la caractéristique du système (α), laquelle, à cause de la (33), rencontrera surement l'axe de x. On conclut, en s'appuyant sur le théorème VI, que $u(x, t) \equiv 0$ dans le domaine limité par les deux caractéristiques considérées et par les droites $x = x_1$, $t = 0$, et donc, aussi, $u(x^*, t^*) = 0$.

On a encore le théorème:

XV. *En conservant les hypothèses du théorème précédent, soit Γ la totalité des fonctions de la classe C', définies dans le quadrant $D(x \geqslant x_1,\ t \geqslant 0)$, satisfaisant à la condition*

$$u(x_1, t) = u_1(t), \quad pour\ t \geqslant 0;$$

il ne peut alors exister plus d'une solution de la (10), *régulière dans $J(\infty)$, appartenant à la totalité Γ et vérifiant les conditions initiales* (18).

Soit $u(x, t)$ une solution de la (10_0), régulière dans $J(\infty)$, appartenant à la totalité Γ_0 et vérifiant les conditions initiales (18_0) et soit $P^*(x^*, t^*)$ un point arbitrairement choisi, intérieur à D. On peut déterminer un nombre non négatif τ, assez grand pour en résulter

$$\tau_1 + \int_{x_1}^{x} \beta(\zeta)\, d\zeta > 0, \quad \text{pour } x_1 < x \leqq x^*,$$

$$t_0 = \tau_1 + \int_{x_1}^{x^*} \beta(\zeta)\, d\zeta > t^*,$$

et alors, dans le domaine limité par la caractéristique du système (β), ménée par le point (x_1, τ_1), par celle du système (α), ménée par le point (x^*, t_0) et par les droites $x = x_1$ et $t = 0$, on a $u(x, t) \equiv 0$ et à cause de cela $u(x^*, t^*) = 0$. Notons, enfin, aussi le théorème suivant:

XVI. *Soit I l'axe réel tout entier et y soient* $a_{20} > 0$, $a_{20}\, a_{02} - a_{11}^2 < 0$.

Supposons encore que les intégrales des racines $\alpha(x)$ *et* $\beta(x)$ *de la* (32)

$$\int_{x^*}^{-\infty} \beta(\zeta)\, d\zeta, \qquad \int_{x^*}^{+\infty} \alpha(\zeta)\, d\zeta,$$

divergent vers l'infini négatif.

Il ne peut alors exister plus d'une solution de la (10) *régulière dans* $J(\infty)$ *et vérifiant les conditions initiales* (18).

Soient $u(x, t)$ une solution de la (10_0), régulière dans $J(\infty)$ et vérifiant les conditions initiales (18_0), $P^*(x^*, t^*)$ un point intérieur à $J(\infty)$, arbitrairement choisi, $P_0(x^*, t_0)$ un autre point d'ordonnée $t_0 > t^*$. Dans le domaine limité par les deux caractéristiques des systèmes (α) et (β), ménées par le point P_0, et par la droite $t = 0$, on a $u(x,t) \equiv 0$ et par suite $u(x^*, t^*) = 0$.

Pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x) \frac{\partial u}{\partial t} + c(x)\, u = f(x, t),$$

ne sont pas vérifiées les hypothèses du théorème et la méthode actuelle peut seulement démontrer que les conditions initiales

(18) sur l'axe réel déterminent une solution régulière dans le domaine lieu des points tels qu'on a

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

8. Calcul de la solution et recherches d'existence. Nous avons trouvé que la transformée $u^*(x, \lambda)$ de la solution $u(x, t)$ du problème A ou du problème B, doit vérifier, dans l'intervalle I, l'équation (11) et, puisqu'on a

$$u^*(x_i, \lambda) = \int_0^{t_i} e^{\lambda(t_i - t)} u(x_i, t)\, dt, \qquad (i = 1, 2),$$

et on a posé

$$\int_0^{t_i} e^{\lambda(t_i - t)} u_i(t)\, dt = u_i^*(\lambda),$$

aux conditions aux limites de l'intervalle I,

$$u^*(x_i, \lambda) = u_i^*(\lambda), \qquad (i = 1, 2), \tag{34}$$

les $u_i(\lambda)$ étant des fonctions entières connues de λ. Mais, comme nous avons vu, dans les hypothèses du théorème IV, telles conditions déterminent complètement la fonction $u^*(x, \lambda)$ et, si on la suppose calculée, on en peut avoir de suite, pour chaque point fixé x de I, le calcul de la $u(x, t)$ par un développement en série.

On a, en effet, pour chaque entier k non négatif,

$$\int_0^T e^{\pm \frac{ik\pi}{T}(T-t)} u(x, t)\, dt = u^*\left(x, \pm \frac{ik\pi}{T}\right),$$

et par là, en posant

$$\frac{1}{T}\left[u^*\left(x, \frac{ik\pi}{T}\right) + u^*\left(x_1 - \frac{ik\pi}{T}\right)\right] = v_k(x),$$

il en résulte

$$\frac{2}{T}\int_0^T u(x, t) \cos \frac{k\pi(T-t)}{T}\, dt = v_k(x),$$

c'est à dire

$$(35) \qquad u(x,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k(x) \cos \frac{k\pi\left[T(x)-t\right]}{T(x)}.$$

Mais le calcul de la $u^*(x,\lambda)$ et par là des $\nu_k(x)$, présente une difficulté à cause de la présence dans la fonction $V(x,\lambda)$ du second membre de la (11) [cfrm. à la (12)] des fonctions inconnues $X_0(x)$ et $X_1(x)$. On se trouve donc en présence du problème de devoir indiquer une méthode générale pour le calcul préventif de telles fonctions.

Nous observerons à cet égard que, si $t=T(x)$ est une caractéristique de la (10), en posant $X_0 \equiv X$, on a tout à fait simplement

$$V(x,\lambda) = -(a_{01} - a_{10}T' - a_{20}T'')X - 2(a_{11} - a_{20}T')X',$$

et par suite $V(x,t)$ vient à dépendre de la fonction inconnue unique X.

Dans le cas de l'équation (28), si les hypothèses du théorème XI sont-elles vérifiées, on trouve pour u^* l'équation sans aucune fonction inconnue,

$$(36) \qquad \frac{d^2u^*}{dx^2} + a_{10}\frac{du^*}{dx} + a_{00}u^* = \Phi(x,\lambda) + f^*(x,\lambda).$$

Cette équation, avec les conditions (34), nous donne le calcul de la fonction $u^*(x,\lambda)$, entière de λ. On en déduit la formule (35) résolutive du problème, à laquelle, moyennant des vérifications, on pourra demander le théorème d'existence. Il est encore bien intéressant d'observer qu'on trouve *une infinité de conditions intégrales nécessaires pour l'existence de la solution du problème*, si on conserve toutes les hypothèses du théorème XI outre celle-ci selon laquelle l'unité n'est pas une valeur caractéristique du paramètre ν.

On se rend compte de cette circonstance, en considérant le cas particulier

$$u_1^*(\lambda) = u_2^*(\lambda) \equiv \varphi_0(x) = \varphi_1(x) \equiv 0,$$

quand on a

$$\Phi(x, \lambda) \equiv 0,$$

$$T(x) = \int_{x_1}^{x} a(\zeta)\, d\zeta, \quad \int_{x_1}^{x} a(\zeta)\, d\zeta > 0, \text{ pour } x_1 < x < x_2,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} a(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Soit $w(x)$ une solution, non identiquement nulle, des équations

$$\frac{d^2 u^*}{dx^2} + a_{10} \frac{d u^*}{dx} + a_{00}\, u^* = 0, \quad u^*(x_1) = u^*(x_2) = 0.$$

En posant

$$p(x) = e^{\int_{x_1}^{x} a_{10}(\zeta)\, d\zeta},$$

il est nécessaire, pour l'existence de la solution $u^*(x, \lambda)$ de la (35), vérifiant (34), et, par suite, pour celle de la solution $u(x, t)$ du problème d'intégration A pour la (28), qu'on a, identiquement en λ,

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, w(x)\, f^*(x, \lambda)\, dx = 0.$$

Il est nécessaire donc que les $f(x, t)$ satisfassent à l'infinité suivante des équations intégrales

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, w(x)\, f^*(x, \lambda)\, dx\right]_{\lambda=0} = 0, \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

qui s'écrivent

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, w(x) \int_{0}^{T(x)} \Big[T(x) - t\Big]^k f(x, t)\, dt = 0.$$

Demandons nous maintenant comment est-ce qu'on peut parvenir, dans les conditions les plus générales, au calcul préventif de la $V(x, \lambda)$? Je n'ai pas encore approfondit dans toute sa généralité l'étude de telle question. Je pense à présent, à cause des circonstances que j'ai rencontré dans les problèmes analogues, que celui-ci encore pourrait-être résolu en prenant en considération la seule condition que la $u(x, \lambda)$ doit résulter une fonction entière de λ, tandis que la solution $u^*(x, \lambda)$ de la (11), vérifiant les conditions aux limites (34), aura des pôles si on laisse les $X_0(x)$ et $X_1(x)$ complètement arbitraires. En considérant chacun de tels pôles, les équations qui expriment l'annulation des coefficients des puissances négatives du développement de LAURENT de la $u^*(x, \lambda)$ devraient-être suffisantes, dans son totalité, pour nous fournir le calcul de la $V(x, \lambda)$.

Une telle présomption est, par exemple, confirmée dans le cas particulier de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - a(x)\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t),$$

avec les conditions initiales (18) et (cfrm. au théorème VIII) avec celle-ci

$$u(x_1, t) = u_1(t), \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

dans le domaine $J(\gamma) + FJ(\gamma)$ et dans l'hypothèse qu'on a

$$\gamma(x) \equiv \tau + \int_{x_1}^{x} a(\zeta)\, d\zeta > 0, \quad \text{pour } x_1 < x < x_2.$$

La (11) se réduit alors à la suivante

$$(37) \qquad (\lambda - 1)\frac{du^*}{dx} = -X'(x) + \Phi(x, \lambda) + f^*(x, \lambda)$$

dont on doit rechercher une solution entière de λ, vérifiant la condition unique

$$u^*(x, \lambda) = u_1^*(\lambda).$$

Evidemment la (37) ne peut posséder une solution $u^*(x, \lambda)$, entière en λ, que lorsqu'on a

$$X'(x) \equiv \Phi(x, 1) + f^*(x, 1),$$

et, une fois $X'(x)$ ainsi déterminée, on a, grâce à (37), la solution entière en λ :

$$u^*(x, \lambda) = u_1^*(\lambda) + \int_{x_1}^{x} \frac{\Phi(\zeta, \lambda) + f^*(\zeta, \lambda) - \Phi(\zeta, 1) - f^*(\zeta, 1)}{\lambda - 1} d\zeta .$$

UNE GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE MM. S. BANACH ET S. MAZUR

Par W. Orlicz, Poznań

Soit $\varepsilon_1(t)=1$ pour $0<t<1/2$, $\varepsilon_1(t)=-1$ pour $1/2<t<1$, $\varepsilon_1(0)=$ $=\varepsilon_1(\frac{1}{2})=0$, $\varepsilon_1(t+1)=\varepsilon_1(t)$ et soit $\varepsilon_n(t)=\varepsilon_1(2^{n-1}t)$ pour $n=2,3,\ldots$ Les fonctions $\varepsilon_n(t)$ s'appellent fonctions de Rademacher et on peut établir à leur aide une corréspondence biunivoque entre les nombres d'intervalle $(0,1)$ (les nombres dyadiquement finis exclus) et l'ensemble de toutes suites infinies composées de nombres 0 et 1 (un ensemble dénombrable de ces suites exclu).

Une fonction $f(x)$ définie dans $\langle a,b\rangle$ est dite *à variation bornée d'ordre p dans* $\langle a,b\rangle$, si pour toute division d'intervalle $\langle a,b\rangle$ par les points $a=x_0<x_1<\ldots<x_k=b$, les sommes

$$\sum_{i=1}^{k}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|^p$$

ont la borne supérieure finie. Désignons par $V_p\big(f(x)\big)$ cette borne supérieure (pour $p=1$ nous écrivons $V_1\big(f(x)\big)=V\big(f(x)\big)$).

Nous démontrons dans cette note les théorèmes suivants:

Théorème I. *Soient $f_1(x), f_2(x),\ldots$ des fonctions à variation bornée d'ordre p dans $\langle a,b\rangle$ telles que pour presque tout $0<t<1$, $n=1,2,\ldots$, on a*

$$V_p\big(\varepsilon_1(t)f_1(x)+\varepsilon_2(t)f_2(x)+\ldots+\varepsilon_n(t)f_n(x)\big)\leqslant M.$$

Dans ces hypothèses on a pour toute division d'intervale $\langle a,b\rangle$

$$\text{(a) } si\ p\geqslant 2 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k}\left|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})\right|^p\Big)\leqslant MC_p,$$

(b) *si* $1 \leqslant p \leqslant 2$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\left|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})\right|^p\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant MC_p,$

où C_p *est une constante (dépendante de* p *et d'ailleurs telle que* $C_p \leqslant 8^p$*).*

Théorème II. *Soient* $f_1(x), f_2(x), \ldots$ *des fonctions à variation bornée dans* $\langle a, b\rangle$ [1]) *et soit pour presque tout* $0<t<1$, $n=1, 2, \ldots$

$$V\left(\varepsilon_1(t)f_1(x)+\varepsilon_2(t)f_2(x)+\ldots+\varepsilon_n(t)f_n(x)\right) \leqslant M.$$

Alors

$$V^2\left(f_1(x)\right)+V^2\left(f_2(x)\right)+\ldots+V^2\left(f_n(x)\right)+\ldots \leqslant 8M.$$

J'ai démontré déja que la série dans la thèse du théorème 2 est convergente, en s'appuyant sur un théorème de MM. S. Banach et S. Mazur[2]), concernant la possibilitè d'établir une corréspondance linéaire conservant la norme de tout sous-espace séparablè contenu dans l'espace des fonctions à variation bornée avec l'espace des fonctions intégrables. Je donne ici une démonstration directe et plus courte. Du théorème 2 résulte immédiatement le théorème suivant du à MM. S. Banach et S. Mazur:

Théorème III. *Si* $f_1(x), f_2(x), \ldots$ *sont des fonctions à variation bornée dans* $\langle a, b\rangle$ *et si pour tout système* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *d'indices différents on a*

$$V\left(f_{n_1}(x)+f_{n_2}(x)+\ldots+f_{n_k}(x)\right) \leqslant M,$$

alors $$\lim V\left(f_n(x)\right)=0\ ^{3)}.$$

La démonstration s'appuie sur deux lemmes:

Lemme 1. *Pour* $p \geqslant 1$, *on a*

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant C_p \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{N} a_n \varepsilon_n(t)\right|^p dt$$

où C_p *est une constante* $\leqslant 8^p$.

---

[1]) c. à d. à variation bornée d'ordre 1.

[2]) S. Banach et S. Mazur: *Zur Theorie der linearen Dimension*, Studia Math. 4 (1933), p. 100—112.

[3]) l. c. [2]) p. 108.

C'est l'inéqualité dû à M. KHINTCHINE; elle est p. e. demontrée implicitement dans la monographie de MM. S. KACZMARZ et H. STEINHAUS[4]).

Lemme 2. Soit pour presque tout $0 < t < 1$

$$\sum_{i=1}^{k} \Big| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n(t)\, a_{ni} \Big|^p \leqslant M, \quad p \geqslant 1,$$

alors on a

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n=1}^{N} a_{ni}^2 \Big)^{\frac{p}{2}} \leqslant M C_p. \tag{1}$$

Démonstration. Définissons dans $\langle 0, 1 \rangle$ les fonctions $f_n(x) = a_{ni}$ pour $\frac{i-1}{k} \leqslant x < \frac{i}{k}$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $n = 1, 2, \ldots$ Alors on a pour tout t

$$\int_0^1 \Big| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n(t)\, f_n(x) \Big|^p dx = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \Big| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n(t)\, a_{ni} \Big|^p \leqslant \frac{k}{M},$$

et d'après le lemme 1

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} f_n^2(x) \Big)^{\frac{p}{2}} \leqslant C_p \int_0^1 \Big| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n(t)\, f_n(x) \Big|^p dt.$$

En intégrant cette l'inegalité suivant x et changeant en même temps l'ordre d'intégration nous obtenons

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{N} f_n^2(x) \Big)^{\frac{p}{2}} dx \leqslant C_p \frac{M}{k},$$

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n=1}^{N} a_{ni}^2 \Big)^{\frac{p}{2}} \leqslant C_p \frac{M}{k},$$

c. à d. l'inégalité (1).

---

[4]) S. Kaczmarz et H. Steinhaus: *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1935.

Démonstration du théorème 1. Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_k = b$ une division de l'intervalle $\langle a, b \rangle$; posons $a_{ni} = |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})|$ pour $i = 1, 2, \dots, k$. L'hypothèse du théorème 1 et le lemme 2 entraînent l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n=1}^{N} \big(f_n(x_i) - f_n(x_{i-1}) \big)^2 \Big)^{\frac{p}{2}} \leqslant C_p M. \tag{2}$$

Soit $p \geqslant 2$; en tenant compte que pour $q \geqslant 1$, $a_i \geqslant 0$ on a $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^q \geqslant a_1^q + a_2^q + \dots + a_n^q$, nous déduisons (a) directement de (2).

Soit $1 \leqslant p < 2$; on a pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ arbitraires

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \Big| f_n(x_i) - f_n(x_{i-1}) \Big|^p \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^{\frac{2-p}{2}} \Big)^{\frac{2}{2-p}} \Big(\sum_{n=1}^{N} \big(f_n(x_i) - f_n(x_{i-1}) \big)^2 \Big)^{\frac{p}{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{i=1}^{k} \Big| f_n(x_i) - f_n(x_{i-1}) \Big|^p \leqslant C_p M \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^{\frac{2-p}{2}} \Big)^{\frac{2}{2-p}},$$

d'oú resulte (b).

Démonstration du théorème 2. D'après le théorème 1 on a pour $p = 1$

$$\sum_{n=1}^{N} \Big(\sum_{i=1}^{k} \Big| f_n(x_i) - f_n(x_{i-1}) \Big| \Big)^2 \leqslant 8 M.$$

En choisissant une suite convenable de divisions d'intervalle dont la longeur maximum tend vers 0 on obtient le théorème.

SUR LES ENSEMBLES DES POINTS DE DIVERGENCE DE CERTAINES INTÉGRALES SINGULIÈRES[1])

Par Z. Zahorski, Kraków

1. Dans le présent travail je vais exposer les conditions nécessaires et suffisantes pour l'ensemble des points x tels que la limite $g(x) = \lim_{s\to\infty} g(s, x)$, où

$$(1) \qquad g(s,x) = \int_a^b f(x+t)K(s,t)dt,$$

n'existe pas. L'intégration est au sens de Lebesgue; quant aux fonctions $f(x)$ et $K(s,t)$ je suppose que l'intégrale (1) existe pour tout x réel et tout s appartenant à un ensemble S de valeurs positives de s, non borné supérieurement; $K(s,t)=0$ pour tout $t \bar{\epsilon} (a, b)$. (Il s'agit surtout des ensembles: de tous $s>0$, et s naturelles). Je pose $g(x) = \lim_{s\to\infty} g(s,x)$ pour les valeurs de x auxquelles cette limite existe. Je considère les ensembles:

$$M_1 = \left\{ 0 < \overline{\lim_{s\to\infty}}\, g(s,x) - \underline{\lim_{s\to\infty}}\, g(s,x) < +\infty \right\},$$

$$M_2 = \left\{ \overline{\lim_{s\to\infty}}\, g(s,x) - \underline{\lim_{s\to\infty}}\, g(s,x) = +\infty \right\},$$

$$M_3 = \left\{ g(x) = +\infty \right\}, \qquad M_4 = \left\{ g(x) = -\infty \right\}.$$

Les opérations (1) embrassent la convergence et la sommabilité des séries de Fourier (par les méthodes de Abel-Poisson,

[1]) Les résultats de ce travail ont été obtenus dans la période de guerre de 1940—1945 (les §§ 4, 5 — méth. de M. Fejér en 1941, le § 5 en 1942, les §§ 2, 3, 6 en 1943, le § 7 en 1945) et communiqués dans les séances de la Soc. Polon. de Math. à Lwów en 1941 et à Kraków en 1944 et 1945, voir ce journal t. XVIII, p. 163).

(C, r), $r > 0$, en particulier par les méthodes de M. FEJÉR) et la dérivation de l'intégrale, unilatérale et symétrique. On sait, que dans tous les cas cités ci-dessus, à l'exception de la convergence simple de la série de Fourier, on a presque partout $g(x) = f(x)$ pour toute fonction $f(x)$ sommable et les M_2 sont G_δ de mesure nulle, M_1 sont $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle. Je vais démontrer que ce sont aussi les conditions suffisantes pour les ensembles M_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, et je vais exposer pour la convergence simple de la série de Fourier un résultat partiel sans démonstration. En posant $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = s$ pour tout $t \in \left(0, \frac{1}{s}\right)$, $K(s, t) = 0$ pour tout $t \bar{\in} \left(0, \frac{1}{s}\right)$, s prenant toutes les valeurs $\geqslant 1$, $\int\limits_0^x f(t)\,dt = \varphi(x)$, on a $g(x) = \varphi_+(x)$. Un tel noyau je vais appeler le noyau de la dérivée à droite. En posant $K(s, t) = s$ pour tout $t \in \left(-\frac{1}{2s}, \frac{1}{2s}\right)$, $K(s, t) = 0$ pour tout $t \bar{\in} \left(-\frac{1}{2s}, \frac{1}{2s}\right)$, j'obtiens le noyau de la dérivée symétrique; alors $g(x) = \varphi'_{\text{sym}}(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h}$ Je suppose toujours: $-\infty < a < 0 < b < +\infty$.

2. Quant au noyau $K(s,t)$, je suppose qu'il satisfait à certaines conditions parmi les suivantes:

$$\text{I.} \int\limits_a^b K(s, t)\,dt = 1, \quad \text{II.} \ K(s, t) \geqslant 0, \quad \text{III.} \int\limits_a^b |K(s, t)|\,dt < C,$$

$$\text{IV.} \lim_{s \to \infty} \int\limits_a^{-\delta} + \int\limits_\delta^b |K(s, t)|\,dt = 0 \text{ pour tout } \delta > 0,$$

$$\text{V.} \lim_{s \to \infty} [\sup_{t \in \Delta} |K(s, t)|] = 0 \text{ où } \Delta = [a, -\delta] + [\delta, b], \text{ pour tout } \delta > 0,$$

$$\text{VI.} \ |K(s, t)| < C(\delta) \text{ pour tout } s \text{ et tout } t \in \Delta,\ \delta > 0.$$

$$\text{VII.} \int\limits_a^b \mathcal{K}(s, t)\,dt < C, \text{ où } \mathcal{K}(s, t) = \sup_{\theta \in [a, t]} |K(s, \theta)|$$

pour tout $t \in [a, 0)$, $\mathcal{K}(s, t) = \sup\limits_{\theta \in [t, b]} |K(s, \theta)|$ pour tout $t \in [0, b]$,

VII*. $K(s,t) = \mathcal{K}(s,t)$, VIII. $|K(s,t)| < C(s)$, IX. il existe une suite de nombres positifs $\delta_n \to 0$ tels que $\sum_{n=1}^{\infty} n\eta(\delta_n, s) < +\infty$ pour tout $s \in S$, $\eta(\delta, s)$ désignant la borne supérieure des valeurs de $\int_M |K(s,t)|dt$ sur les ensembles $M \subset [a,b]$, de mesure inférieure à δ, d'ailleurs arbitraires.

Ces conditions ne sont pas indépendantes, à savoir: I.II→III, V→IV, VII*I→VII, VII→III, VII→VI, VIII→IX.

Le noyau satisfaisant aux conditions I, II, IV et VI sera dit *positif*, le noyau satisfaisant aux conditions I, III, IV et VI—*quasi-positif*. Le noyau quasi-positif jouit de la propriété suivante: la fonction $f(t)$ étant continue pour $t=x$, on a $g(x)=f(x)$. Lorsque $f(t)$ est bornée (et continue pour $t=x$), les conditions I, III et IV sont elles-mêmes suffisantes pour que $g(x)=f(x)$ ait lieu. Les relations citées ci-dessus qui subsistent entre les conditions I—IX sont presque évidentes, et je vais seulement démontrer les relations: VII→VI, VIII→IX et le théorème suivant:

(0) *Si* $S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$ *et le noyau* $K(s,t)$ *satisfait pour tout* S_k *à la condition* IX, *il lui satisfait aussi pour* S.

Démonstration. En tant que la fonction $\eta(\delta,s)$ de δ est non décroissante et d'après l'hypothèse, il existe des suites $\{\delta_{n,k}\}$ de nombres positifs tels que $\lim_{n\to\infty} \delta_{n,k} = 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\eta(\delta_{n,k}, s) < +\infty$ pour tout $s \in S_k$. Posons $\delta_n = \min(\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots \delta_{n,n})$; alors $\eta(\delta_n, s) \leqslant \eta(\delta_{n,k}, s)$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Quand $s \in S$, alors $s \in S_{k_0}$ et l'on a: $\sum_{n=1}^{\infty} n\eta(\delta_n, s) =$

$$= \sum_{n=1}^{k_0-1} n\eta(\delta_n, s) + \sum_{n=k_0}^{\infty} n\eta(\delta_n, s) \leqslant \sum_{n=1}^{k_0-1} n\eta(\delta_n, s) + \sum_{n=k_0}^{\infty} n\eta(\delta_{n,k_0}, s) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{k_0} n\eta(\delta_n, s) + \sum_{n=1}^{\infty} n\eta(\delta_{n,k_0}, s) < +\infty,$$ c. q. f. d.

Corollaire. *La condition IX est remplie toujour, lorsque l'ensemble S est dénombrable.* En effet, il suffit de démontrer que cette condition est remplie, lorsque S ne contient qu'un seul élément, or on peut alors choisir δ_n suffissament petit pour que $\eta(\delta_n, s) \leqslant \frac{1}{n^3}$ et la condition IX est remplie.

Lorsque VIII a lieu, on a $\eta(\delta_n, s) \leqslant \delta_n C(s)$ et en choisissant $\delta_n = \frac{1}{n^3}$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} n\eta(\delta_n, s) \leqslant C(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ pour tout s, c. q. f. d.

Enfin, comme $\mathcal{K}(s,t)$ est, en tant que la fonction de t non négative, non décroissante dans $[a, 0)$ et non croissante dans $[0, b]$ on a selon VII: $C > \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\,dt \geqslant \int_{-\delta}^{\delta} \mathcal{K}(s,t)\,dt \geqslant$ $\geqslant \delta[\mathcal{K}(s,-\delta) + \mathcal{K}(s,\delta)]$, et on en déduit que $\frac{C}{\delta} > \mathcal{K}(s,\delta)$ et $\frac{C}{\delta} > \mathcal{K}(s,-\delta)$ donc $\frac{C}{\delta} > \mathcal{K}(s,t) \geqslant |K(s,t)|$ pour tout $t \in [a,-\delta] + [\delta, b]$; or il suffit de poser $C(\delta) = \frac{C}{\delta}$ pour aboutir à VI.

3. ***Théorème I.*** *Si le noyau $K(s,t)$ satisfait aux conditions I, IV et VII, alors pour toute fonction sommable on a $g(x) = f(x)$ pour presque tous x, à savoir lorsque* $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)|\,dt = 0$. *Si, en outre, $K(s,t)$ satisfait à VII*, alors* $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t)\,dt = +\infty$ *entraîne (pour la même valeur de x) $g(x) = +\infty$.*

Démonstration. On déduit de I que:

$$(2) \qquad \Delta(s,x) = g(s,x) - f(x) = \int_a^b \left[f(x+t) - f(x)\right] K(s,t)\,dt.$$

En outre, le noyau $K(s,t)$ satisfait alors aux conditions III et VI. $\varphi(t)$ étant une fonction sommable, je désigne par A l'integrale $\int_a^b |\varphi(t)|\,dt$ et par $\mu(\varrho)$ un nombre tel que pour un ensemble mesurable quelconque $M \subset [a,b]$ de mesure non supérieure à $\mu(\varrho)$ on ait

$$\int_M |\varphi(t)|\,dt \leqslant \varrho. \tag{3}$$

Soit ε un nombre positif arbitraire. Selon IV nous avons pour tout $\delta > 0$:

$$\int_a^{-\delta} + \int_\delta^b |K(s,t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2A}\,\mu\left[\frac{\varepsilon}{2C(\delta)}\right] \quad \text{pour tout} \quad s \in (s_0, +\infty)S,$$

où s_0 dépend de ε, δ et A. Il en résulte que l'ensemble E_1 des points $t \in [a,-\delta]+[\delta,b]$ auxquels $|K(s,t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2A}$ est de mesure:

$$|E_1| < \mu\left[\frac{\varepsilon}{2C(\delta)}\right] \tag{4}$$

pour tout $s \in (s_0, +\infty)S$. Sur l'ensemble E_1 on a, en vertu de VI, $|K(s,t)| < C(\delta)$ et aux points restants, de $E_2 = [a,-\delta]+$ $+[\delta,b] - E_1$ on a $|K(s,t)| < \frac{\varepsilon}{2A}$, en suite de quoi:

$$\int_a^{-\delta} + \int_\delta^b |K(s,t)|\,|\varphi(t)|\,dt = \int_{E_1} |K(s,t)\varphi(t)|\,dt + \int_{E_2} |K(s,t)\,\varphi(t)|\,dt <$$

$$< C(\delta)\cdot \int_{E_1} |\varphi(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2A}\int_{E_2} |\varphi(t)|\,dt < C(\delta)\cdot\frac{\varepsilon}{2C(\delta)} + \frac{\varepsilon}{2A}\cdot A = \varepsilon$$

pour tout $s \in (s_0, +\infty)S$ (selon (3) et (4)), c'est à dire:

$$\lim_{s\to\infty} \int_a^{-\delta} + \int_\delta^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \quad \text{pour tout} \quad \delta > 0. \tag{5}$$

Supposons que: $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h|\varphi(t)|\,dt=0$ et choisissons $\varepsilon>0$, arbitraire. Il existe alors un nombre $h_0(\varepsilon)$ tel que

$$(6)\qquad \frac{1}{h}\int_0^h|\varphi(t)|\,dt<\varepsilon_1=\min\left(\frac{\varepsilon}{3C},1\right) \text{ pour tout } h\leqslant h_0;$$

il existe aussi (en vertu de (5)) un nombre $s_1(\varepsilon, h_0(\varepsilon))$ tel que:

$$(7)\qquad \left|\int_a^{-h_0}+\int_{h_0}^b K(s,t)\varphi(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ pour tout } s\,\epsilon\,(s_1,+\infty)S.$$

Enfin à tout s on peut attribuer un nombre $h_1(s,\varepsilon)<h_0$ tel que:

$$(8)\qquad \int_{-h_1}^{h_1}|K(s,t)\varphi(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{6}.$$

On deduit de VII:

$$\left|\int_{-h_0}^{-h_1}+\int_{h_1}^{h_0}K(s,t)\,\varphi(t)\,dt\right|\leqslant\int_{-h_0}^{-h_1}+\int_{h_1}^{h_0}\mathcal{K}(s,t)|\varphi(t)|\,dt.$$

À toute fonction sommable $\psi(x)$ on peut associer un nombre λ tel que

$$(9)\qquad \int_u^v|\psi(x)|\,dx<\omega \qquad \text{lorsque } |v-u|<\lambda,$$

$$(9')\qquad \omega=\frac{\varepsilon}{24}\min\left(\frac{1}{\mathcal{K}(s,-h_1)-\mathcal{K}(s,-h_0)},\frac{1}{\mathcal{K}(s,h_1)-\mathcal{K}(s,h_0)},1\right)$$

(en posant $\frac{1}{0}=+\infty$ en tant que ce soit nécessaire). Je divise les intervalles $(-h_0,-h_1)$ et (h_1,h_0) en n intervalles I_r', I_r'' de longueur inférieure au $\min(\lambda,\omega)$. Considérons l'intervalle $(-h_0,-h_1)$ (on applique ensuite le même raisonnement pour le second intervalle). Je désigne par $k_1,k_2,\dots,k_n$ les valeurs de $\mathcal{K}(s,t)$ aux points initiaux $-h_0=t_1,t_2,\dots,t_n$ de ces intervalles, on a $t_i<t_j$ pour $i<j$. Soit $k_{n+1}=\mathcal{K}(s,t_{n+1})$ où $t_{n+1}=-h_1$.

Comme $\mathcal{K}(s,t)$ est monotone, on a $k_i \leqslant k_j$ pour $i \leqslant j$ et

$$(10)\quad \sum_{r=1}^{n} k_r \int_{I_r'} \psi^+(t)\,dt \leqslant \int_{-h_0}^{-h_1} \mathcal{K}(s,t)\,\psi^+(t)\,dt \leqslant \sum_{r=1}^{n} k_{r+1} \int_{I_r'} \psi^+(t)\,dt$$

$$(11)\quad \sum_{r=1}^{n} k_{r+1} \int_{I_r'} \psi^-(t)\,dt \leqslant \int_{-h_0}^{-h_1} \mathcal{K}(s,t)\,\psi^-(t)\,dt \leqslant \sum_{r=1}^{n} k_r \int_{I_r'} \psi^-(t)\,dt$$

$$\left|\int_{-h_0}^{-h_1} \mathcal{K}(s,t)\psi^+(t)\,dt - \sum_{r=1}^{n} k_r \int_{I_r'} \psi^+(t)\,dt\right| \leqslant \sum_{r=1}^{n} (k_{r+1}-k_r) \int_{I_r'} \psi^+(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \omega \sum_{r=1}^{n} (k_{r+1}-k_r) = \omega(k_{n+1}-k_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{24},\quad (|I_r'| < \lambda)$$

en tenant compte de (9′), (9). $\big(\psi^+(t) = \psi(t)$ lorsque $\psi(t) \geqslant 0$, $\psi^+(t) = 0$ lorsque $\psi(t) < 0$, $\psi^-(t) = \psi(t) - \psi^+(t)\big)$. On déduit de (11) les limitations analogues pour les intégrales avec $\psi^-(t)$, il en resulte

$$(12)\qquad \left|\int_{-h_0}^{-h} \mathcal{K}(s,t)\,\psi(t)\,dt - \sum_{r=1}^{n} k_r \int_{I_r'} \psi(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{12}$$

et d'une manière analogue:

$$(12')\qquad \left|\int_{-h_0}^{-h_1} \mathcal{K}(s,t)\,\psi(t)\,dt - \sum_{r=1}^{n} k_{r+1} \int_{I_r'} \psi(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Désignons $I_r' + I_{r+1}' + \ldots + I_n' = H_r$, alors

$$(13)\quad \sum_{r=1}^{n} k_r \int_{I_r'} \psi(t)\,dt = k_1 \int_{H_1} \psi(t)\,dt + \sum_{r=1}^{n-1} (k_{r+1}-k_r) \int_{H_{r+1}} \psi(t)\,dt$$

et d'une manière analogue:

$$(13')\quad \sum_{r=1}^{n} k_{r+1} \int_{I_r'} \psi(t)\,dt = k_2 \int_{H_1} \psi(t)\,dt + \sum_{r=1}^{n-1} (k_{r+2}-k_{r+1}) \int_{H_{r+1}} \psi(t)\,dt.$$

En particulier, en posant $\psi(t)=|\varphi(t)|$, j'obtiens de (10) et (13')

$$\int_{-h_0}^{-h_1} \mathcal{K}(s,t)|\varphi(t)|\,dt \leqslant k_2 \int_{H_1} |\varphi(t)|\,dt + \sum_{r=1}^{n-1} (k_{r+2}-k_{r+1}) \int_{H_{r+1}} |\varphi(t)|\,dt.$$

Comme $\int_{H_i} \psi(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_{n+1}} \psi(t)\,dt = \int_0^{t_{n+1}} \psi(t)\,dt - \int_0^{t_i} \psi(t)\,dt$, et d'après

(6): $\int_{H_i} |\varphi(t)|\,dt \leqslant - \int_0^{t_i} |\varphi(t)|\,dt < \varepsilon_1 |t_i| = - \int_0^{t_i} \varepsilon_1\,dt = \int_{H_i} \varepsilon_1\,dt - \varepsilon_1 t_{n+1}$,

on a

$$\begin{aligned}\int_{-h_0}^{-h_1} \mathcal{K}(s,t)|\varphi(t)|\,dt &< k_2 \Big(\int_{H_1} \varepsilon_1\,dt - \varepsilon_1 t_{n+1} \Big) + \\ &+ \sum_{r=1}^{n-1} (k_{r+2}-k_{r+1}) \Big(\int_{H_{r+1}} \varepsilon_1\,dt - \varepsilon_1 t_{n+1} \Big) = \\ &= \sum_{r=1}^{n} k_{r+1} \int_{I'_r} \varepsilon_1\,dt - \varepsilon_1 t_{n+1} \Big(k_2 + \sum_{r=1}^{n-1} (k_{r+2}-k_{r+1}) \Big) = \\ &= \sum_{r=1}^{n} k_{r+1} \int_{I'_r} \varepsilon_1\,dt - \varepsilon_1 t_{n+1} k_{n+1}.\end{aligned} \tag{14}$$

La limitation (12), (12') subsiste pour $\psi(t) \equiv \varepsilon_1$, car, selon (6), $\varepsilon_1 \leqslant 1$, $\Big($donc $\int_u^v \varepsilon_1\,dt \leqslant |v-u| < \omega$ pour $|v-u| < \min(\lambda, \omega)\Big)$, c'est à dire

$$\Big| \int_{-h_0}^{-h_1} \mathcal{K}(s,t)\, \varepsilon_1\,dt - \sum_{r=1}^{n} k_{r+1} \int_{I'_r} \varepsilon_1\,dt \Big| < \frac{\varepsilon}{12}. \tag{15}$$

On a selon (14), (15):

$$\int_{-h_0}^{-h_1} \mathcal{K}(s,t)|\varphi(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{12} + \int_{-h_0}^{-h_1} \mathcal{K}(s,t)\, \varepsilon_1\,dt - \varepsilon_1 t_{n+1} k_{n+1}.$$

Comme $K(s,t)$ est monotone, on obtient $-t_{n+1}\,k_{n+1}\leqslant$ $\leqslant\int\limits_{t_{n+1}}^{0}\mathcal{K}(s,t)\,dt$, d'où

$$\int\limits_{-h_0}^{-h_1}\mathcal{K}(s,t)|\varphi(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{12}+\varepsilon_1\int\limits_{-h_0}^{0}\mathcal{K}(s,t)\,dt.$$

La dernière formule, avec la formule analogue pour l'intervalle (h_1,h_0) nous donne:

$$(16)\qquad \int\limits_{-h_0}^{-h_1}+\int\limits_{h_1}^{h_0}\mathcal{K}(s,t)\,|\varphi(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{6}+\varepsilon_1\int\limits_{-h_0}^{h_0}\mathcal{K}(s,t)\,dt<\frac{\varepsilon}{6}+C\cdot\frac{\varepsilon}{3C}=\frac{\varepsilon}{2},$$

selon VII et (6). Il résulte de (16), (8) et (7)

$$\left|\int\limits_{a}^{b}K(s,t)\,\varphi(t)\,dt\right|\leqslant\left|\int\limits_{a}^{-h_0}+\int\limits_{h_0}^{b}K(s,t)\,\varphi(t)\,dt\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{-h_1}^{h_1}K(s,t)\,\varphi(t)\,dt\right|+\left|\int\limits_{-h_0}^{-h_1}+\int\limits_{h_1}^{h_0}K(s,t)\,\varphi(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{6}+\int\limits_{-h_0}^{-h_1}+\int\limits_{h_1}^{h_0}\mathcal{K}(s,t)\,|\varphi(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

pour tout $s\in S(s_1,+\infty)$,

c'est à dire

$$\lim_{s\to\infty}\int\limits_{a}^{b}K(s,t)\,\varphi(t)\,dt=0.$$

En particulier, pour $\varphi(t)=f(x+t)-f(x)$, on a:

$$\lim_{s\to\infty}\Delta(s,x)=0,$$

c'est à dire, selon (2): $g(x)=\lim\limits_{s\to\infty}g(s,x)=f(x)$, lorsque $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}|f(x+t)-f(x)|\,dt=0$, c. q. f. d. Lorsque $K(s,t)$ satisfait à VII* et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}\varphi(t)\,dt=+\infty$, il existe h_0 tel que pour $|h|\leqslant h_0$,

on ait:

$$(17) \qquad \frac{1}{h}\int_0^h \varphi(t)\,dt > M,$$

M étant un nombre positif arbitraire, et il existe un nombre s_2 tel que les inégalités suivantes subsistent:

$$(18) \qquad \left|\int_a^{-h_0} + \int_{h_0}^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt\right| < 1 \text{ pour tout } s \in (s_2, +\infty)S,$$

$$(19) \qquad \left|\int_a^{-h_0} + \int_{h_0}^b K(s,t)\,dt\right| < \frac{1}{4} \text{ pour tout } s \in (s_2, +\infty)S;$$

elles résultent de IV et (5). s étant choisi arbitrairement, il existe h_1 tel que

$$(20) \qquad \int_{-h_1}^{h_1} |K(s,t)\,\varphi(t)|\,dt < 1, \qquad \int_{-h_1}^{h_1} K(s,t)\,dt < \frac{1}{4}.$$

En divisant les segments $(-h_0, -h_1)$ et (h_1, h_0) en parties intérieures a $\min\left(\lambda, \frac{\omega}{M}\right)$ pour $\psi(t) = \varphi(t)$ j'obtiens, en tenant compte de la relation: $\int_u^v M\,dt = M(v-u) < \omega$ pour $0 < v-u < \frac{\omega}{M}$ de (12), (avec $\psi(t) \equiv M$), (13) et (17):

$$(21) \qquad \left|\int_{-h_0}^{-h_1} K(s,t)\,M\,dt - k_1\int_{H_1} M\,dt - \sum_{r=1}^{n-1}(k_{r+1}-k_r)\int_{H_{r+1}} M\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{12}$$

$$\left|\int_{-h_0}^{-h_1} K(s,t)\,\varphi(t)\,dt - k_1\int_{H_1}\varphi(t)\,dt - \sum_{r=1}^{n-1}(k_{r+1}-k_r)\int_{H_{r+1}}\varphi(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{12}$$

$$\int_{-h_0}^{-h_1} K(s,t)\,\varphi(t)\,dt > k_1\int_{t_1}^{t_{n+1}}\varphi(t)\,dt + \sum_{r=1}^{n-1}(k_{r+1}-k_r)\int_{t_{r+1}}^{t_{n+1}}\varphi(t)\,dt - \frac{\varepsilon}{12} =$$

$$=k_1\int_{t_1}^{0}\varphi(t)\,dt+\sum_{r=1}^{n-1}(k_{r+1}-k_r)\int_{t_{r+1}}^{0}\varphi(t)\,dt-k_n\int_{t_{n+1}}^{0}\varphi(t)\,dt-\frac{\varepsilon}{12}>k_1M|t_1|+$$

$$+\sum_{r=1}^{n-1}(k_{r+1}-k_r)\,M|t_{r+1}|-k_n\int_{t_{n+1}}^{0}|\varphi(t)|\,dt-\frac{\varepsilon}{12}=$$

$$=k_1\int_{t_1}^{0}M\,dt+\sum_{r=1}^{n-1}(k_{r+1}-k_r)\int_{t_{r+1}}^{0}M\,dt-\int_{t_{n+1}}^{0}k_n|\varphi(t)|\,dt-\frac{\varepsilon}{12}=$$

$$=k_1\int_{t_1}^{t_{n+1}}M\,dt+\sum_{r=1}^{n-1}(k_{r+1}-k_r)\int_{t_{r+1}}^{t_{n+1}}M\,dt-k_nt_{n+1}M-$$

$$-\int_{t_{n+1}}^{0}k_n|\varphi(t)|\,dt-\frac{\varepsilon}{12}>\int_{-h_0}^{-h_1}K(s,t)\,M\,dt-\frac{\varepsilon}{6}-$$

$$-\int_{t_{n+1}}^{0}K(s,t)|\varphi(t)|\,dt>M\int_{-h_0}^{-h_1}K(s,t)\,dt-\frac{\varepsilon}{6}-1$$

(selon (20), (21), et car $k_nt_{n+1}M<0$).

Les limitations analogues subsistent pour l'intègrale relative à l'intervalle (h_1, h_0), de sorte que:

$$\int_{-h_0}^{-h_1}+\int_{h_1}^{h_0}K(s,t)\varphi(t)\,dt>M\left(\int_{-h_0}^{-h_1}+\int_{h_1}^{h_0}K(s,t)\,dt\right)-\frac{\varepsilon}{3}-2\,. \tag{22}$$

Il resulte de I, (20), (19): $\int_{-h_0}^{-h_1}+\int_{h_1}^{h_0}K(s,t)\,dt>\frac{1}{2}$, donc, en tenant compte de (22), (20) et (18), on a:

$$\int_{a}^{b}K(s,t)\varphi(t)\,dt>\frac{M}{2}-\frac{\varepsilon}{3}-2-1-1 \quad \text{pour tout} \quad s\in S(s_2,+\infty)$$

c'est à dire $\lim\limits_{s\to\infty}g(s,x)=+\infty$ pour $\varphi(t)\equiv f(x+t)$, lorsque $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}f(x+t)\,dt=+\infty$, c. q. f. d.

Théorème II. Lorsque $f(t)$ est bornée, alors toutes les fonctions $g(s,x)$ correspondants à un noyau $K(s,t)$ sommable par rapport à t sont continues par rapport à x (même lorsque K ne satisfait à aucune des conditions I—IX). Lorsque $f(t)$ est sommable et $K(s,t)$ satisfait à la condition VIII, toutes les fonctions $g(s,x)$ sont continues par rapport à x.

Il est possible, que ce théorème soit déjà connu. Je n'éxpose ici que l'idée essentielle de la démonstration, analogue à une démonstration appliquée par M. A. ZYGMUND (à un autre théorème, *Trigonom. series*). Si $f(x)$ est non bornée, je la remplace par une fonction bornée, dont l'intégrale diffère peu de l'intégrale de $f(x)$ et ensuite par une fonction prenant un nombre fini de valeurs sur les ensembles, dont je peux supposer, qu'ils sont G_δ. Il suffit donc de démontrer ce théorème pour une fonction caractéristique d'un ensemble G_δ, qu'on peut remplacer à son tour par la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert qui donne l'approximation suffisante de l'ensemble donné G_δ. Ensuite j'extrais de cet ensemble les intervalles, dont la mesure totale est petite, de sorte qu'il ne reste qu'un nombre fini de ces intervalles. Il suffit donc de faire la démonstration pour le cas où $f(x)$ est la fonction caractéristique d'un intervalle, et ceci ne présente aucune difficulté.

4. M. BANACH a posé le problème suivant: caractériser l'ensemble de points de non-sommabilité de la série de Fourier par la méthode de FEJÉR. Le problème analogue pour les opérations aux noyaux positifs a été posée par M. ORLICZ.

Il s'est révélé que dans le cas du noyau positif il est possible que l'égalité $g(x)=f(x)$ n'ait pas lieu sur un ensemble de mesure positive. Dans ce cas c'est la condition VII qui est décisive. Je vais donner, notamment, l'exemple d'un noyau satisfaisant aux conditions I—IX à l'exception de VII (et VII*) pour lequel $\lim\limits_{s\to\infty} g(s,x)$ n'existe pas sur l'ensemble M_1 de mesure positive.

À cet effet, posons $K(n,k,t)=0$ pour tout $t\,\overline{\in}\left((k-1)\frac{1}{2^{2n+6}}, k\frac{1}{2^{2n+6}}\right)$, $K(n,k,t)=2^{2n+6}$ pour tout $t\in\left(\frac{k-1}{2^{2n+6}}, \frac{k}{2^{2n+6}}\right)$, n et k étant entiers positifs et $k=1,2,\dots 2^{n+5}+36$ et rangeons toutes les

$K(n,k,t)$ en une suite infinie simple, de sorte que les termes correspondants à n fixe forment les groupes des termes consécutifs, $n=1,2,\ldots$ (alors la suite est: $K(1,1,t)$, $K(1,2,t),\ldots$ $K(1,2^{1+5}+36,t)$, $K(2,1,t)$, $K(2,2,t),\ldots$, $K(2,2^{2+5}+36,t),\ldots$ $K(n,1,t)$, $K(n,2,t),\ldots$ $K(n,2^{n+5}+36,t),\ldots$). Je désigne par s l'indice des termes de cette suite, s dépend de n et k, et inversement, n et k sont des fonctions de s, $s(n,k)$, $n(s)$, $k(s)$, et je pose $K^*(s,t)=K\big(n(s),\ k(s),\ t\big)$. L'ensemble S est cette fois l'ensemble de nombres entiers positifs. Il est facile de vérifier que $K^*(s,t)$ satisfait aux conditions I, II, VIII, et de même aux conditions V et VI, car n etant fixe, on a $K(n,k,t)=0$ pour $|t|>(2^{n+5}+36)\frac{1}{2^{2n+6}}$, $\frac{2^{n+5}+36}{2^{2n+6}}\to 0$ pour $n\to\infty$. Par suite $K^*(s,t)$ satisfait aux cond. I—VI et VIII, IX.

On peut associer à tout intervalle $I\subset\left(0,\ \frac{2^{n+5}+36}{2^{2n+6}}\right)$ de longueur $|I|\geqslant\frac{1}{2^{2n+4}}$ un nombre k_I tel que $\left(\frac{k_I-1}{2^{2n+6}},\ \frac{k_I}{2^{2n+6}}\right)\subset I$.

Je définis la fonction $f(t)$ comme il suit: je choisis dans l'intervalle $[0,1]$ l'intervalle (ouvert) concentrique de longueur $\frac{1}{4}$ et je pose $f(t)=1$ sur cet intervalle; dans les deux segments restants je choisis de même les intervalles concentriques de longueur $\frac{1}{16}$ et je pose $f(t)=-1$ sur ces intervalles, etc. (La construction est analogue à celle de l'ensemble de Cantor, les longueurs des intervalles choisis pour n-ième fois étant $\frac{1}{2^{2n}}$ et la valeur de $f(t)$ sur ces intervalles étant égale à $(-1)^{n+1}$). Après l'extraction de tous ces intervalles de $[0,1]$, il y reste un ensemble E parfait, non dense, de mesure $\frac{1}{2}$; soit $f(t)=0$ pour tout $t\in E$ et pour tout $t\bar{\in}[0,1]$.

Si l'on n'a effectué que n extractions, il reste dans $[0,1]$ 2^n segments de longueur $\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\ldots\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{2n+1}}$.

Tout $x \epsilon E$ appartient à l'un de ces segments, $L(x, n)$, et l'intervalle $\left(x, x+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{2n+4}}\right)$ contient l'intervalle I de longueur $\frac{1}{2^{2n+4}}$ contenu dans un intervalle $H(x, n)$ extrait dans l'une des n premières extractions, à savoir celui des intervalles situés à droit de x, qui est le plus approché à x. Je suppose que ce soit dans la m-ième extraction, $m(n, x) \leqslant n$ (dépendant de x et de n). Comme $\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{2n+4}}=\frac{2^{n+5}+36}{2^{2n+6}}$, il existe un nombre entier k_I, tel que pour tout $t \epsilon \left(\frac{k_I-1}{2^{2n+6}}, \frac{k_I}{2^{2n+6}}\right)$, on ait $x+t \epsilon I$; donc $f(x+t)=(-1)^{m+1}$. Alors pour $s=s_{n,x}=$ $=s(n, k_I)$ (où I dépend de x et de n) on a $g(s, x)=$

$$=\int_{-1}^{1} K^*(s, t) f(x+t)\, dt=\int_{-1}^{1} K(n, k_I, t) \cdot(-1)^{m+1}\, dt=$$

$$=(-1)^{m+1} \int_{I} K(n, k_I, t)\, dt=(-1)^{m+1},$$

où $I=\left(\frac{k_I-1}{2^{2n+6}}, \frac{k_I}{2^{2n+6}}\right)$, c. à d. $g(s_{n,x}, x)=(-1)^{m(n,x)+1}$.

Supposons, que x ne soit pas à l'extremité gauche d'un des segments de CE. Considérons la suite $\{n\}$ de numéros des extractions succesives. Soit n_0 un element arbitraire de cette suite. Supposons que $n_1>n_0$ et que dans la n_1-ième extraction on extraie pour la premiere fois (après la n_0-ième extraction) de $L(x, n_0)$ l'intervalle $H(x, n_1)$ situé à droit de x $\big(H(x, n_1)$ existe, car x n'est pas l'extremité droite de $L(x, n_0)\big)$; alors $m(n_1, x)=n_1$, $m(n_1-1, x)=m(n_1-2, x)=\ldots=m(n_0, x)$, $m(n_1, x) \equiv m(n_0, x)$ (mod 2) ou non. Au premier cas, considérons un intervalle $H'=H(x_1, n_1+1)$ où x_1 est à l'extremité droite de $H(x, n_1)$, extrait dans la n_1+1-ère extraction entre $H(x, n_1)$ et $H(x, n_0)$, de longueur $|H'|=\frac{1}{2^{2n_1+2}}$, dans lequel $f(t)=(-1)^{n_1+2}=$ $=(-1)^{m(n_1, x)+2}=(-1)^{m(n_0, x)}$.

La distance x de H' n'est pas supérieure à $\frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{2n_1-1}}=$ à la longueur des segments qui restent après la n_1-1-ère extraction,

car $\operatorname{dist}(x,H') \leqslant x_2 - x$, où x_2 désigne l'extremité droite de $L(x,n_0)$, x_2 et x étant les points d'un segment restant après la $n_1 - 1$-ère extraction, car selon la définition de n_1, dans la n_1-ième extraction on extrait pour la *premiere fois* un intervalle situé entre x et x_2. Il en résulte que dans l'intervalle $\left(x, x+\frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{2n_1-1}}+\right.$ $\left.+\frac{1}{2^{2n_1+2}}\right) \supset H'$ est situé l'intervalle $I' \subset H'$, de longueur $\frac{1}{2^{2n_1+4}}$, et il existe $k_{I'}$ tel que pour $t \in \left(\frac{k_{I'}-1}{2^{2n_1+4}}, \frac{k_{I'}}{2^{2n_1+4}}\right)$ on ait $x+t \in I'$, donc $f(x+t) = (-1)^{m(n_0,x)}$. Je désigne par $s_{(n_1,x)}$ la valeur $s = s(n_1 - 1, k_{I'})$ (où I' dépend de x et n_1), et l'on a $g(s_{(n_1,x)}, x) =$ $= (-1)^{m(n_0,x)}$. Si, au contraire, $m(n_1,x) \equiv m(n_0,x)+1 \pmod 2$, on a $g(s_{n_1,x}, x) = (-1)^{m(n_1,x)+1} = (-1)^{m(n_0,x)}$. Ainsi à chaque n_0 sont associées deux valeurs s_1 et s_2 $\left(s_{n_0,x} \text{ et } s_{n_1,x} \text{ ou } s_{(n_1,x)}\right)$ telles que $g(s_1,x)=1$, $g(s_2,x)=-1$, et on a $\lim_{n_0\to\infty} s_1 = \infty$, $\lim_{n_0\to\infty} s_2 = \infty$, car $\lim_{n\to\infty} s(n,k) = +\infty$, $n_1 > n_0$, $n_1 - 1 \geqslant n_0$. Comme n_0 est arbitraire, on peut former ainsi deux suites, telles que $\lim_{s_1\to\infty} g(s_1,x) = 1$, $\lim_{s_2\to\infty} g(s_2,x) = -1$, de sorte que $\lim_{s\to\infty} g(s,x)$ n'existe pas. L'ensemble des extremités gauches des intervalles extraits étant dénombrable, on a $|M_1| = |E| = \frac{1}{2}$, c. q. f. d.

Comme $\mathcal{K}(n,k,t) = 0$ pour tout $t \bar{\in} \left[0, \frac{k}{2^{2n+6}}\right)$, $\mathcal{K}(n,k,t) =$ $= 2^{2n+6}$ pour tout $t \in \left[0, \frac{k}{2^{2n+6}}\right)$ on a $\int_{-1}^{1} \mathcal{K}(n,k,t)\,dt = k$ et comme $\max k = 2^{n+5}+36$, $\overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{-1}^{1} \mathcal{K}^*(s,t)\,dt = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-1}^{1} \mathcal{K}(n,k,t)\,dt = +\infty$, la condition VII n'est pas remplie.

5. Il résulte du théorème II (HAUSDORFF, Mengenlehre, 1927, p. 270) que l'ensemble M_2 est G_δ, M_1 est $G_{\delta\sigma}$.

Inversement, un ensemble donné G_δ de mesure nulle peut être choisi pour M_2, M_3, ou M_4, un ensemble $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle pour M_1.

Théorème III. *A tout système fini de noyaux $K_i(s,t)$, $i=1,2,\dots n$, satisfaisant aux conditions I, IV, VII, et tout ensemble M du type $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle correspond une fonction bornée $f(x)$ pour laquelle $\overline{\lim_{s\to\infty}}\, g_i(s,x) - \underline{\lim_{s\to\infty}}\, g_i(s,x) > 0$ pour tout $x \in M$ et tout $i=1,2,\dots n$, $g_i(x)=f(x)$ pour tout $x \bar{\in} M$ et tout $i=1,2,\dots n$. En outre, le passage à la limite $s\to\infty$ peut avoir lieu pour chaque opération $(i=1,2,\dots n)$ dans un autre ensemble S_i.*

Démonstration. Comme les ensembles S_i ne sont pas bornés, on peut choisir $s_1 \in S_1$, $s_1 > 10$, $s_2 > s_1$, $s_2 \in S_2, \dots s_i > s_{i-1}$, $s_i \in S_i$, jusqu'à s_n, ensuite $s_{n+1} \in S_1$, $s_{n+1} > \max(10^2, s_n)$, $s_{n+i} \in S_i$, $s_{n+i} > s_{n+i-1}$ jusqu'à s_{2n}, e. c. t. de sorte que $s_{mn+i} \in S_i$, $s_{\nu+1} > s_\nu$, $s_{mn+i} > 10^{m+1}$. Je vais définir une fonction $\gamma(l)$ de la manière suivante: soit $m(l)$ le plus petit nombre entier tel que

$$(23)\qquad \int_a^{-l} + \int_l^b |K_i(s_{mn+i}, t)|\, dt < \frac{1}{4} \text{ pour tout } i=1,2,\dots n,\ m \geqslant m(l).$$

Ce nombre existe si $l>0$, puisque $K_i(s,t)$ satisfont à IV. En désignant par $\eta_i(s)$ le plus grand nombre positif tel que, pour M de mesure inférieure à $\eta_i(s)$ on ait $\int_M |K_i(s,t)|\, dt < \frac{1}{8}$, je pose:

$$(24)\qquad \eta(l) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \eta_i(s_{m(l)n+i}).$$

Alors on a:

$$(25)\qquad \int_M |K_i(s_{m(l)n+i}, t)|\, dt < \frac{1}{8} \text{ pour tout } i=1,2,\dots n$$

lorsque $|M| < \eta(l)$; (23) et (25) entraînent $\eta(l) < 2l$, car, dans le cas contraire, on aurait $\int_a^b |K_i(s_{m(l)n+i}, t)|\, dt < \frac{3}{8}$, contrairement à I. Je pose

$$(26)\qquad \begin{cases} \gamma(l) = \operatorname{born\,inf}_{l \leqslant x \leqslant 1} \dfrac{\eta(x)}{2x} & \text{pour tout } l \leqslant 1 \\ \gamma(l) = \dfrac{\eta(1)}{2} & \text{pour tout } l > 1. \end{cases}$$

La fonction $\gamma(l)$ est positive pour tout $l>0$ et non décroissante. Dans le cas contraire, comme $\gamma(l)\geqslant 0$, on aurait $\gamma(l_0)=0$ pour $l_0>0$ et en tenant compte de (26) $\underset{l_0\leqslant x\leqslant 1}{\text{born inf}}\, \eta(x)=0$. Comme $m(l)$ est non croissante, on a $m(l_0)\geqslant m(x)$ pour $x\geqslant l_0$, par suite:

$$\underset{l_0\leqslant x\leqslant 1}{\text{born inf}}\, \eta(x)\geqslant \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ m\leqslant m(l_0)}} \eta_i(s_{mn+i})>0$$

ce que contient une contradiction.

En outre (26) entraîne:

$$\gamma(l)\leqslant\frac{\eta(l)}{2l}<1 \text{ pour tout } l. \tag{27}$$

Soit M un ensemble G_δ de mesure nulle, d'ailleurs arbitraire. On a donc $M=\prod_{k=1}^{\infty} G_k$, les ensembles G_k étant ouverts. On peut admettre, que $G_k\supset G_{k+1}$ et que $|G_1|<2$. Les ensembles G_k se composent donc des segments de longueur inférieure à 2. Je pose $F_k=CG_k$, alors $CM=\sum_{k=1}^{\infty} F_k$, et je définis une autre suite d'ensembles fermés Φ_k telle que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k=CM, \tag{28}$$

Je le fais ainsi: soit $\Phi_1=F_1$. J'applique ensuite le théorème de MM. Lusin-Menchoff: *À tous les ensembles A, B, mesurables, tels que $A\cdot\!\supset B$ (c'est à dire $A\supset B$ et B se compose de points de densité de A), B étant fermé, correspond un ensemble fermé C tel que $A\cdot\!\supset C\cdot\!\supset B$ et, lorsque A est de pleine épaisseur, $\varkappa>0$ arbitraire, on peut choisir C de sorte qu'on ait*

$$\frac{|(x-h,\, x+h)C|}{2h}>1-\varkappa h \quad \textit{pour tout } x\in B \textit{ et tout } h. \tag{$\triangle$}$$

Je divise les intervalles I de l'ensemble $G_1=CF_1$ en une quantité infinie de segments plus petits, dont les extrémités constituent: le centre du I, deux points à la distance $\frac{|I|}{4}$ des

extrémités, deux à la distance $\frac{|I|}{8}$, e. ct. deux à la distance $\frac{|I|}{2^i}$ des extrémités. Chaque segment I' ainsi obtenu est de longueur inférieure à $\frac{1}{2}$. La mesure de l'ensemble $I'CM$ est $|I'|$, il existe donc un ensemble fermé $H_{I'} \subset I'CM$ tel que

$$(29) \qquad |H_{I'}| \geqslant |I'| \left[1 - \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{|I'|}{2}\right)\right].$$

L'ensemble $\Phi_1 + \sum H_{I'}$ est fermé, car la limite de la suite x_n de points appartenant à la quantité infinie de $H_{I'}$ est $x_0 \in F_1 = \Phi_1$. Je pose $\Phi_1 + \sum H_{I'} + F_2 = \Psi_1$, on a $\Psi_1 \subset CM$ et comme CM est de pleine épaisseur et Ψ_1 est fermé, il existe, d'après le théorème de Lusin-Menchoff, un ensemble Φ_2 tel que $\Psi_1 \subset \cdot \Phi_2 \subset \cdot CM$.

Supposons, qu'on a défini l'ensemble Φ_k tel que

$$(30) \qquad \Phi_{k-1} \subset \cdot \Phi_k \subset \cdot CM, \quad \Phi_k \supset F_k.$$

Je divise les segments I de l'ensemble $G_k^* = C\Phi_k \subset G_k$ en parties I' d'une manière analogue à celle qui était appliquée auparavant et je définis les ensembles $H_{I'}$ satisfaisant à la condition (29), je désigne par Ψ_k l'ensemble fermé:

$$(31) \qquad \Psi_k = \Phi_k + \sum H_{I'} + F_{k+1} \subset CM$$

et par Φ_{k+1} l'ensemble, satisfaisant à la condition

$$(32) \qquad \Psi_k \subset \cdot \Phi_{k+1} \subset \cdot CM.$$

Les ensembles Φ_k, satisfaisant à la condition (30) sont ainsi définis par induction pour tout k entier positif et d'après (30) on a:

$$CM = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \subset \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \subset CM,$$

c'est à dire (28). Je définis les ensembles $\Phi_{\frac{m}{2^k}}$ pour tous m, k entiers, $\frac{m}{2^k} \geqslant 1$. On a déjà défini les ensembles $\Phi_m = \Phi_{\frac{m}{2^0}}$. Suppo-

sons, qu'on ait défini les ensembles $\Phi_{\frac{m}{2^{k_1}}}$, satisfaisant à la condition:

$$\Phi_{\frac{m_1}{2^{k_1}}} \subset \cdot\, \Phi_{\frac{m_2}{2^{k_1}}} \quad \text{pour tous } m_1 < m_2,$$

je définis alors $\Phi_{\frac{m}{2^{k_1+1}}}$ comme il suit:

$$\Phi_{\frac{2r}{2^{k_1+1}}} = \Phi_{\frac{r}{2^{k_1}}}$$

$$\Phi_{\frac{r}{2^{k_1}}} \subset \cdot\, \Phi_{\frac{2r+1}{2^{k_1+1}}} \subset \cdot\, \Phi_{\frac{r+1}{2^{k_1}}}$$

suivant le théorème de MM. Lusin-Menchoff. Les ensembles ainsi définis satisfont à la condition

(33) $$\Phi_{\frac{m}{2^k}} \subset \cdot\, \Phi_{\frac{\nu}{2^r}} \quad \text{pour tous } 1 \leqslant \frac{m}{2^k} < \frac{\nu}{2^r}.$$

Je désigne pour tout $\lambda \geqslant 1$ réel:

(34) $$\Phi_\lambda = \prod_{\frac{m}{2^k} \geqslant \lambda} \Phi_{\frac{m}{2^k}}.$$

Les ensembles Φ_λ sont fermés et en tenant compte de (33) satisfont à la condition:

(35) $$\Phi_{\lambda_1} \subset \cdot\, \Phi_{\lambda_2} \text{ pour tous } \lambda_2 > \lambda_1 \geqslant 1,$$

et pour $\lambda = \frac{m}{2^k}$ la définition de Φ_λ est compatible avec la précédente. En effet, en premier. lieu (34) entraîne $\Phi_{\lambda_1} \subset \Phi_{\lambda_2}$. En choisissant deux nombres rationnels dont les dénominateurs sont des puissances de 2, de façon que $\lambda_1 < \frac{m_1}{2^{k_1}} < \frac{m_2}{2^{k_2}} < \lambda_2$, j'obtiens, d'après (33):

$$\Phi_{\lambda_1} \subset \Phi_{\frac{m_1}{2^{k_1}}} \subset \cdot\, \Phi_{\frac{m_2}{2^{k_2}}} \subset \Phi_{\lambda_2}$$

d'où résulte (35). Je definis $\omega(x)$ pour tout $x \in CM$:

(36) $$\omega(x) = \underset{x \in \Phi_\lambda}{\text{born inf}}\, \lambda.$$

Cette fonction est approximativement continue et finie dans CM. (Elle est finie d'après (28) à savoir pour $x \in \Phi_k$ on a $\omega(x) \leqslant k$). D'une manière analogue pour $x \bar{\in} \Phi_k$ on a $\omega(x) \geqslant k$, par suite:

$$(37) \qquad k \leqslant \omega(x) \leqslant k+1 \quad \text{pour tout } x \in \Phi_{k+1} - \Phi_k.$$

Pour $x_0 \in CM$ arbitraire, considérons le nombre $\omega(x_0) - \varepsilon$. D'après (36) on a $x_0 \bar{\in} \Phi_{\omega(x_0)-\varepsilon}$, donc

$$\text{dist}\,(x_0, \Phi_{\omega(x_0)-\varepsilon}) = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$$

et selon (35) $\text{dist}\,(x_0, \Phi_\lambda) \geqslant \delta(x_0, \varepsilon)$ pour tout $\lambda < \omega(x_0) - \varepsilon$, donc parmi les points $x \in CM$ dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sont situés ceux seulement qui appartiennent à Φ_λ avec $\lambda > \omega(x_0) - \varepsilon$, donc, d'après (36) $\omega(x) \geqslant \omega(x_0) - \varepsilon$ pour tout $x \in CM(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, c'est à dire $\omega(x)$ est semi-continue inferieurement.

En définissant $\omega(x)$ sur M d'une manière arbitraire, on ne change pas la continuité approximative dans CM, puisque $|M| = 0$; pour que la semi-continuité au sens propre ait lieu, il faut poser $\omega(x) = +\infty$ pour tout $x \in M$.

Considérons le nombre $\omega(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. D'après (36) on a: $x_0 \in \Phi_{\omega(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}} \subset \Phi_{\omega(x_0)+\varepsilon}$; mais pour $x \in \Phi_{\omega(x_0)+\varepsilon}$ on a $\omega(x) \leqslant \omega(x_0) + \varepsilon$, c'est à dire x_0 est un point de densité de ces points x, auxquels $\omega(x) \leqslant \omega(x_0) + \varepsilon$, par suite $\omega(x)$ est approximativement semicontinue supérieurement. Je définis pour $x \geqslant 1$ la fonction continue $d(x)$ égale à $2k$ pour tout $x \in [2k-1, 2k]$, $k = 1, 2, \ldots$ et linéaire aux intervalles restants. Elle est non décroissante. Soit:

$$(38) \qquad \Omega(x) = d\big[\omega(x)\big].$$

La fonction $\Omega(x)$ est définie et approximativement continue pour tout $x \in CM$, car $\omega(x) \geqslant 1$. D'après (37) elle satisfait à la condition

$$(39) \qquad \Omega(x) = 2k \quad \text{pour tout } x \in \Phi_{2k} - \Phi_{2k-1}.$$

Je définis une fonction approximativement continue sur CM:

$$(40) \qquad b(x) = \cos\frac{\pi}{2}\,\Omega(x).$$

Cette fonction est bornée et satisfait à la condition:

(41) $b(x)=1$ pour tout $x \in \Phi_{4k}-\Phi_{4k-1}$,

(42) $b(x)=-1$ pour tout $x \in \Phi_{4k+2}-\Phi_{4k+1}$.

Aux points $x \in CM$ on a

(43) $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |b(x+t)-b(x)|\,dt=0\,.$$

En effet, le point x_0 est un point de la densité de l'ensemble $E_1=\left\{|b(\tau)-b(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}$, il existe donc un nombre h_0 tel que pour $|h|\leqslant h_0$ la densité moyenne g de l'ensemble $E_2=\left\{|b(\tau)-\right.$ $\left.-b(x_0)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ dans $(0,h)$ est inférieure à $\frac{\varepsilon}{4}$. Par suite:

$$\int_0^h |b(x_0+t)-b(x_0)|\,dt=\int_{E_1(0,h)}+\int_{E_2(0,h)}\leqslant 2|E_2(0,h)|+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}|E_1(0,h)|<2gh+\frac{\varepsilon}{2}h<\varepsilon h$$

$$\frac{1}{h}\int_0^h |b(x_0+t)-b(x_0)|dt<\varepsilon \quad \text{pour tout } h\leqslant h_0$$

c. q. f. d. D'après le théorème I on déduit de (43)

(44) $$\lim_{s\to\infty} g_i(s,x)=\lim_{s\to\infty}\int_a^b K_i(s,t)\,b(x+t)\,dt=b(x)$$

pour tout $x \in CM$ et $i=1,2,\dots n$.

Je vais démontrer, que pour $x \in M$ les limites (44) n'existent pas. On a alors:

$$x\in\prod_{k=1}^{\infty} C\Phi_k,\quad C\Phi_{k+1}\subset C\Phi_k,\quad \lim_{k\to\infty}|C\Phi_k|=0\,,$$

donc $\operatorname{dist}(x,\Phi_k)=d_k(x)>0$, $d_{k+1}(x)\leqslant d_k(x)$, $\lim_{k\to\infty} d_k(x)=0$.

En particulier on peut choisir deux suites Φ_i: Φ_{4k-1} et Φ_{4k+1}, $\lim_{k\to\infty} d_{4k-1}(x) = \lim_{k\to\infty} d_{4k+1}(x) = 0$. Considérons un terme Φ_{4k-1} arbitraire, pour Φ_{4k+1} le raisonnement est analogue à celui pour Φ_{4k-1}. Je désigne: $d_{4k-1}(x) = u$, $m\big(d_{4k-1}(x)\big) = m'$. D'après (23) on a:

$$(45)\quad \left|\int_a^{-u} + \int_u^b K_i(s_{m'n+i}, t)\, b(x+t)\, dt\right| \leqslant \int_a^{-u} + \int_u^b \left|K_i(s_{m'n+i}, t)\right| dt < \frac{1}{4}$$

pour $i = 1, 2, \ldots n$.

Un, au moins, des nombres $x-u$, $x+u$ appartient à Φ_{4k-1} $\big($car $u = \operatorname{dist}(x, \Phi_{4k-1})\big)$, par ex. le second. Le premier appartient à Φ_{4k-1}, ou est situé dans la moitié gauche de la composante I de l'ensemble $C\Phi_{4k-1}$, ou dans la moitié droite (le centre y compris). Je vais évaluer, à chacun de ces cas, la mesure $\varkappa$ de l'ensemble $(x-u, x+u)C\Phi_{4k}$. Selon (31), (32), on a:

$$C\Phi_{4k} \subset C\Psi_{4k-1} \subset C\sum H_{I'}$$

$$(46)\qquad |(x-u, x+u)\, C\Phi_{4k}| \leqslant |(x-u, x+u)\, C\sum H_{I'}|.$$

D'après (29) on a:

$$(47)\qquad \left|I'C\sum H_{I'}\right| = \left|I'CH_{I'}\right| \leqslant \left|I'\right| \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{|I'|}{2}\right).$$

Je désigne par $\sum' I'$ la somme de tous ces I', qui sont contenus dans $(x-u, x+u)$ et par I'' le produit $I_0'(x-u, x+u)$, I_0' désignant celui des I' qui contient $x-u$. Alors

$$(x-u, x+u)\, C\sum H_{I'} = I''C\sum H_{I'} + \sum{}' I'C\sum H_{I'} =$$
$$= I''CH_{I_0'} + \sum{}' I'CH_{I'},$$

$$\left|(x-u, x+u)\, C\sum H_{I'}\right| \leqslant \left|I_0'CH_{I_0'}\right| + \sum{}' \left|I'\right| \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{|I'|}{2}\right),$$

$$(48)\quad \left|(x-u, x+u)\, C\Phi_{4k}\right| \leqslant \left|I_0'\right| \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{|I_0'|}{2}\right) + \sum{}' \left|I'\right| \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{|I'|}{2}\right).$$

Dans le premier cas il n'y a pas de I_0' et toutes les $|I'|$ sont inférieures à $\frac{u}{2}$, donc, $\gamma(x)$ étant monotone, j'obtiens d'après (47):

$$(49)\qquad \varkappa \leqslant \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{u}{4}\right)\sum |I'| = u\gamma\left(\frac{u}{4}\right) < 2u\gamma(u).$$

On a toujours $\sum' |I'| \leqslant 2u$, en particulier, dans le second et le troisième cas $I_0' < 2u$, donc, d'après (47), (48)

$$(50)\qquad \varkappa < \frac{1}{2}\cdot 2u\gamma(u) + \frac{1}{2}\gamma(u)\cdot\sum' |I'| \leqslant 2u\gamma(u).$$

Les formules (49), (50) et (27) donnent:

$$\varkappa < \eta(u).$$

Comme $m' = m(u)$, on a d'après (25)

$$(51)\qquad \left|\int_{N_1} K_i(s_{m'n+i}, t)\, b(x+t)\, dt\right| \leqslant \int_{N_1} \left|K_i(s_{m'n+i}, t)\right| dt \leqslant \frac{1}{8}$$

pour tout $i = 1, 2, \dots n$.

N_1 étant l'ensemble de t, tels que $x + t \in (x-u, x+u)C\Phi_{4k}$. D'après (41), (51) et (45) on a, puisque $(x-u, x+u) \subset C\Phi_{4k-1}$:

$$(52)\qquad \int_a^b K_i(s_{m'n+i}, t)\, b(x+t)\, dt \geqslant -\int_a^{-u} - \int_u^b \left|K_i(s_{m'n+i}, t)\right| dt -$$

$$-\int_{N_1}\left|K_i(s_{m'n+i}, t)\right| dt + \int_{N_2} K_i(s_{m'n+i}, t)\cdot 1\, dt > \int_{N_2} K_i(s_{m'n+i}, t)\, dt - \frac{3}{8}$$

pour tout $i = 1, 2, \dots n$.

N_2 désignant l'ensemble de t tels que $x + t \in (x-u, x+u)\Phi_{4k}$. D'une manière analogue, de I, (51) et (45) on déduit:

$$\int_{N_2} K_i(s_{m'n+i}, t)\, dt \geqslant \int_a^b K_i(s_{m'n+i}, t)\, dt - \int_a^{-u} - \int_u^b \left|K_i(s_{m'n+i}, t)\right| dt -$$

$$-\int_{N_1}\left|K_i(s_{m'n+i}, t)\right| dt > 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots n,$$

donc, d'après (52) on a:

$$\int_a^b K_i(s_{m'n+i}, t)\, b(x+t)\, dt > \frac{1}{4} \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots n.$$

En vertu de (42) on démontre pareillement l'inégalité:

$$\int_{-a}^b K_i(s_{m''n+i}, t)\, b(x+t)\, dt < -\frac{1}{4} \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots n,$$

pour $m'' = m\big(d_{4k+1}(x)\big)$. Les indices m' et m'' sont des fonctions croissantes non bornées de k, car dans le cas contraire, on aurait pour une certaine valeur de m_0 et pour ε arbitrairement petit:

$\int_a^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^b \left| K_i(s_{m_0 n+i}, t) \right| dt < \frac{1}{4}$, contrairement à I. Ainsi pour tout i on a défini deux suites $s_{m_r n+i} \in S_i$, $s_{m_r'' n+i} \in S_i$ telles que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, g_i(s_{m_r' n+i}, x) \geqslant \frac{1}{4}, \quad \underline{\lim_{r\to\infty}}\, g_i(s_{m_r'' n+i}, x) \leqslant -\frac{1}{4}$$

d'où

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\, g_i(s, x) - \underline{\lim_{s\to\infty}}\, g_i(s, x) \geqslant \frac{1}{2}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

On voit, que dans la démonstration de divergence on n'a pas besoin d'appliquer les conditions VII et III, et qu'on peut même éviter l'application de la condition IV. Au contraire, toutes les conditions sont appliquées dans la démonstration de convergence. Cette remarque est importante pour les noyaux ne satisfaisant pas aux conditions I—IX, par exemple pour le noyau de DIRICHLET.

Ainsi le théorème est démontré dans le cas, oú M est G_δ. Dans le cas général on a $M = \sum_{k=1}^{\infty} M_{(k)}$, les ensembles $M_{(k)}$étant G_δ de mesure nulle, et on peut supposer qu'ils sont disjoints. Je désigne par $b_k(x)$ une fonction telle que $|b_k(x)| \leqslant 1$, pour la-

quelle toutes les opérations sont convergentes à $b_k(x)$ dans $CM_{(k)}$, divergentes dans $M_{(k)}$. La fonction:

(53) $$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k(x)}{2^k}$$

satisfait aux conditions du théorème. En effet, pour $x\in CM$ on a $x\in CM_{(k)}$ pour tout k, et on a pour un i arbitraire:

$$\lim_{s\to\infty}\int_a^b K_i(s,t)\,b_k(x+t)\,dt=b_k(x).$$

Je vais démontrer que:

(54) $$\lim_{s\to\infty}\int_a^b K_i(s,t)\,f(x+t)\,dt=f(x) \quad \text{pour tout } x\in CM.$$

Selon III on a $\int_a^b |K_i(s,t)|\,dt<C_i$. Je choisis $k_0(\varepsilon)$ de sorte que $\frac{1}{2^{k_0}}<\frac{\varepsilon}{4C_i}$, alors:

$$\left|\int_a^b K_i(s,t)\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{b_k(x+t)}{2^k}\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2^{k_0}}C_i<\frac{\varepsilon}{4}$$

et on peut choisir $s_0(k_0,\varepsilon)$ de sorte que pour $s>s_0$ on ait

$$\left|\int_a^b K_i(s,t)\sum_{k=1}^{k_0}\frac{b_k(x+t)}{2^k}\,dt-\sum_{k=1}^{k_0}\frac{b_k(x)}{2^k}\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

on a aussi $\left|\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{b_k(x)}{2^k}\right|\leqslant\frac{1}{2^{k_0}}<\frac{\varepsilon}{4}$ (car $C_i\geqslant 1$), donc:

$$\left|\int_a^b K_i(s,t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k(x+t)}{2^k}\,dt-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k(x)}{2^k}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$$

pour tout $s\in(s_0,+\infty)S_i$,

c'est à dire, on a (54). Pour $x\in M$ on a $x\in M_{(k_0)}$ pour un certain $k=k_0$, et $x\in CM_{(k)}$ pour les autres valeurs de k. Pour la série (53) sans le terme k_0 l'opération est convergente, la démonstration est la même que pour la série totale (sans exclusion du terme k_0) et pour k_0 elle est divergente, et l'opération étant additive

elle est divergente pour la série totale, le théorème est ainsi démontré.

Corollaires. 1) Lorsque $n=3$, K_1 étant le noyau de la dérivée à droite, K_2 celui de la dérivée à gauche, K_3 celui de la dérivée symétrique, $S_1=S_2=S_3=$ l'ensemble des nombres positifs, alors à la fonction bornée $f(x)$ correspond la fonction $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, satisfaisant à la condition de LIPSCHITZ, qui pour $x \epsilon M$ est dépourvue de la dérivée à droite, à gauche et symétrique, pour $x \epsilon CM$ est dérivable et on a $\varphi'(x)=f(x)$. Par suite:

Pour qu'un ensemble soit celui des points de non-dérivabilité (même au sens de M. BESIKOVITCH) *d'une fonction satisfaisant à la condition de* LIPSCHITZ, *il faut et il suffit que cet ensemble soit $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle.*

Pour la non-dérivabilité simple j'ai obtenu ce résultat antérieurement en m'appuyant sur le théorème de MM. Lusin-Menchoff et la construction géométrique (IV 1938, ce travail a été accepté par Bull. de la Soc. Math. de France en 1939, cependant ne parut pas à cause des obstacles causés par la guerre, impr. en russe, Rec. Math. Moscou t. 9 (51): 3, p. 487-510, 1941).

2) *La condition nécessaire et suffisante pour l'ensemble des points de non-sommabilité de la série de* FOURIER *d'une fonction bornée par la méthode (C,r), $r>0$, est que cet ensemble soit $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle.*

3) *La condition nécessaire et suffisante pour l'ensemble des points de la circonférence $|z|\leqslant 1$ aux quels il n'existe pas la limite d'une fonction harmonique bornée dans le cercle $|z|<1$, suivant le rayon de ce cercle est que cet ensemble soit $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle.*

Par une modification de la démonstration, on peut obtenir la convergence simple de la série de Fourier de la fonction $f(x)$ aux points $x \epsilon CM$, et aux points $x \epsilon M$ — non sommabilité par la méthode de FEJÉR. Cependant un tel théorème serait peu important jusqu'à ce qu'on ne sache pas, si ces conditions sont nécessaires pour l'ensemble de points de divergence. Au contraire, la construction de la fonction continue, dont la série de Fourier est divergente à tout point d'nn ensemble de mesure nulle, donné arbitrairement, présente des difficultés essentielles,

lorsqu'on veut appliquer la méthode exposée ci-dessus, même lorsqu'on ne suppose rien sur les autres points.

6. Lorsque la fonction $f(x)$ est bornée et le noyau satisfait à la condition III, les fonctions $g(s,x)$ sont uniformément bornées, donc les ensembles M_2, M_3 et M_4 sont vides. On peut poser la question, si les conditions auxquels satisfont ces ensembles sont différentes dans la classe L et dans la classe L^2. La réponse est négative. Considérons une fonction arbitraire $F(y)$ satisfaisant aux conditions:

$$(*) \quad \begin{aligned} 0 \leqslant F(y) < +\infty \ \text{pour tout}\ y \geqslant 0, \\ F(y_2) \geqslant F(y_1) \ \text{pour tout}\ y_2 > y_1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Je dis que la fonction $f(x)$ est intégrable avec F, lorsque $\int_{a+x}^{b+x} F(|f(t)|)\,dt < +\infty$ pour tous les valeurs de x. En particulier, si $F(z) \geqslant z$ pour $z \geqslant z_0$, la fonction intégrable avec F est sommable [2]).

Théorème IV. *À toute fonction $F(y)$ satisfaisant à la condition (*), à tout ensemble M du type G_δ de mesure nulle, à tout système fini de noyaux $K_i(s,t)$, $i=1,2,\dots n$, satisfaisant aux conditions I, IV, VII et à tout système fini d'ensembles S_i, de nombres réels non bornés supérieurement, on peut faire correspondre une fonction finie $f(x)$, intégrable avec F, telle que $g_i(x)=f(x)$ pour tout $x \in CM$ et tout $i=1,2,\dots n$, $\overline{\lim_{s\to\infty}}\, g_i(s,x) = +\infty$, $\underline{\lim_{s\to\infty}}\, g_i(s,x) = -\infty$ avec $s \in S_i$, pour tout $x \in M$ et tout $i=1,2,\dots n$.*

Théorème V. *À toute fonction $F(y)$ satisfaisant à la condition (*) et à tout ensemble M du type G_δ, de mesure nulle, on peut faire correspondre une fonction $f(x)$, intégrable avec F,*

---

[2]) Étant donnée une suite de fonctions $\{F_n\}$ dont chacune satisfait à la condition (*), nous dirons que la fonction f est intégrable avec $\{F_n\}$ lorsqu'elle est intégrable avec chaque fonction F_n, p. ex. les fonctions de classe L^∞ pour $F_n(y)=y^n$. En posant:

$$F(y) = \max[F_1(y), F_2(y), \dots F_n(y)] \text{ pour tout } y \in [n-1, n),\ n=1,2,3,\dots$$

on peut réduire le cas envisagé au cas précédent. Il est aisé de voir que la fonction F ainsi définie satisfait à la condition (*) et que toute fonction f intégrable avec F est intégrable avec $\{F_n\}$.

approximativement continue et semicontinue et une fonction absolument continue $\varphi(x)$, *telle que* $\varphi'(x) = f(x)$ *pour tout* x, *et* $f(x) = +\infty$ *pour tout* $x \in M$, $1 < f(x) < +\infty$ *pour tout* $x \in CM$, *et en outre que l'on ait* $\lim_{s \to \infty} g(s, x) = f(x)$ *pour tout* x *si* $s \in S$, *pour tout noyau* $K(s, t)$ *satisfaisant aux conditions I, IV, VII* et tout ensemble* S *non borné supérieurement.*

Démonstration. Étant donnée un ensemble M du type G_δ de mesure nulle et une fonction F, je vais construire une fonction $f_1(x)$ satisfaisant aux conditions du théorème V et une fonction $f_2(x)$ satisfaisant aux conditions du théorème IV.

La démonstration est analogue à celle du théorème III, avec les changements qui vont suivre: 1) en effectuant la construction il faut tenir compte de la condition $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| f(x+t) - f(x) \right| dt = 0$, qui n'est pas une conséquence de la continuité approximative, lorsque $f(x)$ est non bornée, 2) il faut supposer l'intégrabilité avec F, cependant on peut admettre que $F(y) \geqslant y$, car dans le cas contraire il suffit de remplacer $F(y)$ par $F_1(y) = \max\left[y, F(y)\right]$, la fonction intégrable avec F_1 étant évidemment intégrable avec F. 3) il est nécessaire de démontrer les inégalités (45), (51), qui pour les fonctions non-bornées ne sont pas les conséquences immédiates de (23) et (25). On peut satisfaire à toutes ces conditions supplémentaires par un choix convenable des ensembles Φ_k; quant à 3) j'applique la condition IX. En choisissant, comme au théorème III l'ensemble dénombrable infiniment croissant de valeurs de s_{mn+i}, on peut considérer les noyaux $K_i(s_{mn+i}, t)$ comme les valeurs d'un seul noyau $\varkappa(s, t)$ défini sur un ensemble dénombrable de valeurs de $s = s_{mn+i}$. Le noyau $\varkappa$ satisfait à la condition IX d'après le corollaire au théorème (0), c'est à dire, il existe une suite de nombres positifs $\delta_k \to 0$, tels que

(55) $$\int_M |K_i(s_{mn+i}, t)| \, dt \leqslant \eta(\delta_k, s_{mn+i}) \text{ pour tout } |M| \leqslant \delta_k,$$

(56) $$\sum_{k=1}^{\infty} k \eta(\delta_k, s_{mn+i}) < +\infty \text{ pour tout } s_{mn+i}.$$

Choisissons les ensembles Φ_k de sorte que

$$(57) \quad |C\Phi_{2k}| \leqslant \min\left(\frac{1}{F(2k+2)^3}, \delta_{k+1}\right) \text{ pour } k=1,2,3,\ldots$$

On peut l'atteindre sans difficulté, car, d'après (30) on a $\Phi_{2k} \supset F_{2k}$, et F_i sont des ensembles fermés arbitraires tels que $\sum_{i=1}^{\infty} F_i = CM$, $CF_i = G_i$ et comme $M = \prod_{i=1}^{\infty} G_i$, $|M| = 0$, on peut choisir G_i de sorte que $|G_{2k}| \leqslant \varepsilon(k)$, $\varepsilon(k)$ étant un nombre positif arbitraire, dépendant de k, en particulier tel que $|G_{2k}| \geqslant |C\Phi_{2k}|$ entraine (57). En outre, je définis les ensembles Φ_k en profitant de la seconde partie du théorème de MM. LUSIN-MENCHOFF ($\triangle$) de sorte que (la formule (32))

$$(58) \quad \frac{|(x-h, x+h)\Phi_{k+1}|}{2h} > 1 - h2^{-k} \text{ pour tout } k > 0, \text{ entier,}$$

pour tout $x \in \Psi_k$ et tout $h > 0$, en particulier pour $x \in \Phi_k$ et $x \in \Phi_{k-1}$ et pour tout $h > 0$.

Les ensembles Φ_k étant ainsi choisis, il suffit de poser

$$f_1(x) = \Omega(x), \quad f_2(x) = \Omega(x) \cos\frac{\pi}{2}\Omega(x) \text{ pour tout } x \in CM.$$

En effet, les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont approximativement continues et la fonction $f_1(x)$ semicontinue inférieurement, car selon (38) elle est une fonction continue non décroissante de la fonction $\omega(x)$ semicontinue inférieurement. Elles satisfont à la condition $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0$ pour tout $x \in CM$; il suffit de la démontrer pour la fonction $f_1(x)$, car

$$|f_2(x+t) - f_2(x)| \leqslant |\cos\frac{\pi}{2}\Omega(x+t)| \cdot |\Omega(x+t) - \Omega(x)| +$$

$$+ |\Omega(x)| \cdot |\cos\frac{\pi}{2}\Omega(x+t) - \cos\frac{\pi}{2}\Omega(x)|,$$

$\Omega(x)\,| = \Omega(x)$, et d'après (40) et (43)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |\cos\frac{\pi}{2}\Omega(x+t) - \cos\frac{\pi}{2}\Omega(x)|\, dt = 0.$$

Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, il existe un nombre $h_0 > 0$, tel que pour $|t| < h_0$ on a

$$\Omega(x+t) - \Omega(x) > -\frac{\varepsilon}{4}.$$

Par suite, pour $t \in E_1$(c. à d. tels que $t \in (0, h)$, $\Omega(x+t) - - \Omega(x) < 0$) on a

$$(59)\quad \frac{1}{|h|}\int\limits_{E_1} |\Omega(x+t) - \Omega(x)|\, dt \leqslant \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4} \text{ pour tout } |h| < h_0.$$

D'après (37), (39) la fonction $\Omega(x)$ satisfait à la condition:

$$(60)\quad \begin{array}{c} 2k-2 \leqslant \Omega(x) \leqslant 2k \text{ pour tout } x \in \Phi_{2k} - \Phi_{2k-2},\ k = 2, 3, \ldots \\ \Omega(x) = 2 \text{ pour tout } x \in \Phi_2. \end{array}$$

Je désigne par k_0 le plus petit nombre entier k tel que $x \in \Phi_{2k}$. Alors d'après (60) on a pour l'ensemble E_2 de t tels que $t \in (0, h)$ et $\Omega(x+t) - \Omega(x) \geqslant 0$

$$(61)\quad \begin{array}{l} \displaystyle\int\limits_{E_2} |\Omega(x+t) - \Omega(x)|\, dt \leqslant \int\limits_{E_2 \Phi^0_{2k_0+2}} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \int\limits_{E_2(\Phi^0_{2k+4} - \Phi^0_{2k+2})} \leqslant \int\limits_{E_0 \Phi^0_{2k_0+2}} + \\ \displaystyle\qquad + \sum_{k=k_0}^{\infty} (6 + 2k - 2k_0) |E_2 C\Phi^0_{2k+2}|, \end{array}$$

où $t \in \Phi^0_m$ c. à d. $x + t \in \Phi_m$, alors $|C\Phi^0_m| = |C\Phi_m|$.

Comme $|E_2 C\Phi^0_{2k+2}| \leqslant |(0, h)\, C\Phi^0_{2k+2}|$, $x \in \Phi_{2k_0} \subset \Phi_{2k}$, la formule (58) donne:

$$(62)\quad \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} (6 + 2k - 2k_0) |E_2 C\Phi^0_{2k+2}| < \sum_{k=k_0}^{\infty} (6 + 2k - 2k_0)\cdot 2h^2 2^{-2k-1} < \\ \displaystyle\qquad < \sum_{k=1}^{\infty} h^2 2^{-2k} (6 + 2k) < \sum_{k=1}^{\infty} h^2 2^{-2k} \cdot 6 \cdot 2^k = 6h^2, \end{array}$$

car $E_2 C\Phi^0_{2k+2} \subset (0, h)\, C\Phi^0_{2k+2}$ et

$$\frac{|(x, x+h)\, N|}{|h|} \leqslant 2\, \frac{|(x-h, x+h)\, N|}{|2h|}$$

pour tout ensemble mesurable N, et en particulier pour $N = C\Phi^0_{2k+2}$. Sur l'ensemble $\Phi^0_{2k_0+2}$ on a, selon (60), $\Omega(x+t) \leqslant 2k_0+2$, et comme $\Omega(x) \geqslant 2k_0-2$, on a, en tenant compte de l'inégalité $\Omega(x+t)-\Omega(x) \geqslant 0$, $|\Omega(x+t)-\Omega(x)| \leqslant 4$ pour tout $t \in E_2\Phi^0_{2k_0+2}$.

La fonction $\Omega(x)$ étant continue approximativement, $t=0$ est le point de la densité nulle de l'ensemble $T = \left\{|\Omega(x+t) - \Omega(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\right\}$, par suite il existe un nombre $h_1 > 0$ tel que pour $|h| < h_1$ la densité moyenne de cet ensemble dans $(0, h)$ est inférieure à $\frac{\varepsilon}{16}$. Comme $E_2 = E_2T + E_2CT$, $|E_2T| \leqslant |(0,h)\,T|$, on a

$$(63)\qquad \int\limits_{E_2\Phi^0_{2k_0+2}} |\Omega(x+t)-\Omega(x)|\,dt = \int\limits_{E_2T\Phi^0_{2k_0+2}} + \int\limits_{E_2\Phi_{2k_0+2}CT} \leqslant 4|h|\frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{4}|h|$$

pour tout $|h| < h_1$,

Les formules (63), (62), (61), (59) donnent pour tout $|h| < \min(h_0, h_1)$

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h |\Omega(x+t)-\Omega(x)|dt = \frac{1}{|h|}\int\limits_{E_1} + \frac{1}{|h|}\int\limits_{E_2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 6|h| + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$(64)\qquad \frac{1}{h}\int\limits_0^h |\Omega(x+t)-\Omega(x)|\,dt < \varepsilon$$

pour tout $|h| < \min\left(h_0, h_1, \frac{\varepsilon}{24}\right)$, c. q. f. d.

Pour $x \in M$ on a $x \bar{\in} \Phi_k$ pour tout k, en particulier $d = \operatorname{dist}(x, \Phi_{2k-2}) > 0$ pour tout $k \geqslant 2$, d dépend de k, $\lim\limits_{k\to\infty} d(k) = 0$, donc pour $x+t \in (x-d, x+d)\,CM$ on a, selon (36), (38), $\Omega(x+t) \geqslant 2k-2$, et comme $\Omega(x+t) \geqslant 0$, on a $\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega(x+t)\,dt \geqslant 2k-2$

pour tout $|h| \leqslant d$, k étant arbitraire, il en résulte que:

(65) $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \Omega(x+t)\,dt = +\infty.$$

La fonction $\Omega(x)$ est intégrable avec F, $f_2(x)$ l'est aussi, car dans un intervalle fini (u, v), arbitraire, on a selon (57), (60)

$$\int_u^v F(\Omega(t))\,dt = \int\limits_{(u,v)\Phi_2} + \sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{(u,v)(\Phi_{2k}-\Phi_{2k-2})} \leqslant F(2)|(u,v)\Phi_2| +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty} F(2k)|C\Phi_{2k-2}| \leqslant F(2)\,(v-u) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{F(2k)^2} \leqslant$$

$$\leqslant F(2)\,(v-u) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{4k^2} < +\infty,$$

$$\int_u^v F(|f_2(t)|)\,dt = \int\limits_{(u,v)\Phi_2} + \sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{(u,v)(\Phi_{2k}-\Phi_{2k-2})},$$

mais pour $x \in \Phi_2$ on a $|f_2(t)| = |\Omega(t)|\cdot|\cos\frac{\pi}{2}\Omega(t)| \leqslant \Omega(t)$ et pour $x \in \Phi_{2k} - \Phi_{2k-2}$ on a $|f_2(t)| \leqslant |\Omega(t)| \leqslant 2k$, c'est à dire pour l'intégrale f_2 subsiste la même limitation que pour l'intégrale de Ω. En posant $f_1(x) = +\infty$ pour tout $x \in M$, j'obtiens une fonction approximativement continue pour tout x et continue pour tout $x \in M$, et intégrable, puisque $F(y) \geqslant y$. Son intégrale $\int_0^x f_1(t)\,dt = \varphi(x)$ est une fonction absolument continue; en outre, il résulte de (65), (64) et du th. I que $\varphi'(x) = f_1(x)$ pour tout x et d'après la définition de $\Omega(x)$, $2 \leqslant f_1(x) < +\infty$ pour tout $x \in CM$; il résulte aussi du th. I la seconde partie du th. V. Il en résulte aussi la convergence de l'opération correspondante à $f_2(t)$ sur CM; il ne reste que la démonstration de la divergence de l'opération sur M. À cet effet, il suffit de changer la définition des fonctions $m(l)$, $\eta(l)$ dans (23) et (24), de la manière suivante: comme

VII→VI, à tout $\delta > 0$ correspond le nombre $C(\delta) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} C_i(\delta) > 0$ tel que

(66) $$|K_i(s, t)| < C(\delta) \text{ pour tout } s \text{ et tout } t \in [a, -\delta] + [\delta, b].$$

On peut supposer, que ce nombre soit si petit, qu'on ne puisse pas remplacer $C(\delta)$ par $C(\delta)-1$ dans (66). Je choisis $k_0(l) = E(2C(l)+2)$, alors d'après (66) et (60), (57) on a:

$$\int_a^{-l} + \int_l^b |K_i(s,t) f_2(x+t)|\, dt \leqslant \int\limits_{([a,-l]+[l,b])\Phi^0_{2k_0-2}} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \int\limits_{([a,-l]+[l,b])(\Phi^0_{2k}-\Phi^0_{2k-2})},$$

$$\int\limits_{([a,-l]+[l,b])(\Phi^0_{2k}-\Phi^0_{2k-2})} |K_i(s,t)| \cdot |f_2(x+t)|\, dt \leqslant C(l) \cdot \int\limits_{\Phi^0_{2k}-\Phi^0_{2k-2}} |f_2(x+t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C(l) \cdot |C\Phi_{2k-2}| \cdot 2k \leqslant \frac{C(l) \cdot 2k}{F(2k)^3},$$

(67) $$\int_a^{-l} + \int_l^b |K_i(s,t) f_2(x+t)|\, dt \leqslant (2k_0-2)\left(\int_a^{-l} + \int_l^b |K_i(s,t)|\, dt\right) + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{C(l)}{4k^2},$$

(68) $$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \int_{k_0-1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{k_0-1} \leqslant \frac{1}{2C(l)}, \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{C(l)}{4k^2} < \frac{1}{8}.$$

Je désigne par $\overline{m}(l)$ le plus petit nombre entier m tel que

(69) $$\int_a^{-l} + \int_l^b |K_i(s,t)|\, dt < \frac{1}{16(k_0-1)}$$

$$\text{pour tout } i = 1, 2, \ldots n, \quad s = s_{nm+i}, \quad m \geqslant \overline{m}(l)$$

le nombre $\overline{m}(l)$ existe en vertu de IV pour tout $l > 0$. Le nombre $\overline{m}(l)$ étant ainsi choisi, je désigne par $k_1(l)$ le plus petit nombre entier supérieur à 1, tel que

(70) $$\sum_{k=k_1}^{\infty} k\eta(\delta_k, s_{\overline{m}n+i}) < \frac{1}{32} \text{ pour tout } i = 1, 2, \ldots n.$$

D'après (56) ce nombre existe. Je désigne par $\overline{\eta}(l)$ le plus grand nombre positif, tel que l'inégalité $|N| < \overline{\eta}(l)$ entraîne toujours

$$(71) \qquad \int_N |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)|\, dt < \frac{1}{32(k_1(l)-1)} \quad \text{pour tout} \quad i = 1, 2, \dots n.$$

On a, comme dans la démonstration du théorème III, $\overline{\eta}(l) < 2l$, car dans le cas contraire on aurait $\int_a^b |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)| dt < \frac{3}{32}$, contrairement à I. Je pose pour $l > 0$

$$(72) \qquad \begin{aligned} \overline{\gamma}(l) &= \underset{l \leqslant x \leqslant 1}{\text{borne inf}} \frac{\overline{\eta}(x)}{2x} \quad \text{pour tout } l \leqslant 1 \\ \overline{\gamma}(l) &= \frac{\overline{\eta}(1)}{2} \quad \text{pour tout } l > 1. \end{aligned}$$

La fonction non décroissante $\overline{\gamma}(l)$ est positive pour tout $l > 0$. Dans le cas contraire on aurait pour un certain $l = l_0 > 0$:

$$(73) \qquad \underset{l^0 \leqslant x \leqslant 1}{\text{borne inf}}\, \overline{\eta}(x) = 0.$$

Comme $\overline{\eta}(x)$ ne dépend que de $k_1(x)$ et $\overline{m}(x)$, et $k_1(x)$ ne dépend que de $\overline{m}(x)$, il suffit de démontrer que $\overline{m}(x)$ ne prend dans l'intervalle $[l_0, 1]$ qu'un nombre fini de valeurs, car alors $\overline{\eta}(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans $[l_0, 1]$, et ces valeurs étant positives, l'égalité (73) serait impossible. À cet effet je désigne par $m(l, \varepsilon)$ la fonction qui s'obtient de $\overline{m}(l)$ en remplaçant $\frac{1}{16(k_0-1)}$ par ε dans (69). Pour ε fixe $m(l, \varepsilon)$ est une fonction non croissante de l, et pour l fixe une fonction non croissante de ε. Je désigne par $\mathfrak{C}(\delta)$ la borne inférieure de tous les nombres $C(\delta)$ satisfaisant à (66); alors $\mathfrak{C}(\delta) \geqslant |K_i(s, t)|$ pour tous $i, s, t \in [a, -\delta] + [\delta, b]$; en outre $\mathfrak{C}(\delta)$ est une fonction non croissante de δ et d'après la convention admise, $\mathfrak{C}(\delta) \leqslant C(\delta) < \mathfrak{C}(\delta) + 1$. Par suite, pour tout $x \in [l_0, 1]$ on a

$$\frac{1}{16(k_0(x)-1)} > \frac{1}{16\, E(2\,\mathfrak{C}(x)+3)} \geqslant \frac{1}{16\, E(2\, C(l_0)+3)} = \varepsilon_0$$

$\overline{m}(x) = m\left(x, \frac{1}{16(k_0(x)-1)}\right) \leqslant m(x, \varepsilon_0) \leqslant m(l_0, \varepsilon_0) = m_0$, donc $\overline{m}(x)$ ne peut prendre dans $[l_0, 1]$ qu'un nombre fini de valeurs $0, 1, 2, \ldots m_0$. Il résulte de (72) que $\overline{\gamma}(l) < 1$. En remplaçant $\gamma(l)$ par $\overline{\gamma}(l)$ dans la définition de Φ_k, j'obtiens, comme dans la démonstration du théorème III (les formules (46), (50)) pour la mesure μ de l'ensemble des $x+t$, $N_1 = (x-u, x+u)\, C\Phi_{4k}$, $\mu < 2u\,\overline{\gamma}(u)$,

$$\mu < \overline{\eta}(u) \tag{74}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b K_i(s_{\overline{m}(u)n+i}, t)\, f_2(t+x)\, dt \geqslant \int_{N_2} K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)\, f_2(x+t)\, dt\, - \\ - \int_{N_1} |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)\, f_2(x+t)|\, dt - \int_a^{-u} - \int_u^b |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)\, f_2(x+t)|\, dt,\end{aligned} \tag{75}$$

$$\int_{N_1} = \int_{N_1 \Phi_{2k_1-2}} + \sum_{k=k_1}^{\infty} \int_{N_1(\Phi_{2k}-\Phi_{2k-2})}, \tag{76}$$

$$\begin{aligned}\int_{N_1(\Phi_{2k}-\Phi_{2k-2})} |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)\, f_2(x+t)|\, dt \leqslant 2k \int_{N_1(\Phi_{2k}-\Phi_{2k-2})} |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)|\, dt \leqslant \\ \leqslant 2k \int_{C\Phi_{2k-2}} |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)|\, dt \leqslant 2k\,\eta(\delta_k, s_{\overline{m}n+i}),\end{aligned} \tag{77}$$

d'après (60), (57), (55),

$$\begin{aligned}\int_{N_1 \Phi_{2k_1-2}} |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)\, f_2(x+t)|\, dt \leqslant (2k_1-2) \int_{N_1} |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)|\, dt \leqslant \\ \leqslant (2k_1-2)\, \frac{1}{32(k_1-1)} = \frac{1}{16},\end{aligned} \tag{78}$$

d'après (60), (74), (71), pour tout $i = 1, 2, \ldots n$,

$$\sum_{k=k_1}^{\infty} \int_{N_1(\Phi_{2k}-\Phi_{2k-2})} |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)\, f_2(x+t)|\, dt \leqslant \sum_{k=k_1}^{\infty} 2k\,\eta(\delta_k, s_{\overline{m}n+i}) < \frac{1}{16} \tag{79}$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots n$,

d'après (77), (70). Les formules (76), (78), (79) donnent

$$(80)\quad \int_{N_1} |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t) f_2(x+t)|dt < \frac{1}{8} \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots n.$$

Les formules (67), (68) et (69), lorsqu'on y remplace l par u et s par $s_{\overline{m}n+i}$, donnent:

$$(81)\quad \int_a^{-u} + \int_u^b |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t) f_2(x+t)|\, dt < \frac{1}{8} + (2k_0-2)\cdot\frac{1}{16(k_0-1)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{pour tout } i = 1, 2, \dots n.$$

Comme, d'après (39), (41), $f_2(x+t) = 4k$ pour tout $x+t \in N_2$, $[N_2 = ([-u, u] - N_1)\,CM]$ on a, d'après (81), (80), (75):

$$\int_a^b K_i(s_{\overline{m}n+i}, t) f_2(x+t)\, dt > 4k \int_{N_2} K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)\, dt - \frac{1}{4} - \frac{1}{8},$$

et selon I, (69), (71),

$$\int_{N_2} K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)\, dt \geqslant \int_a^b K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)\, dt - \int_{N_1} |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)|\, dt -$$

$$\int_a^{-u} - \int_u^b |K_i(s_{\overline{m}n+i}, t)|\, dt > 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{32},$$

donc, finalement:

$$(82)\quad \int_a^b K_i(s_{\overline{m}n+i}, t) f_2(x+t)\, dt > \frac{29}{32}\cdot 4k - \frac{3}{8} \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots n.$$

D'une manière analogue, en vertu de (42) j'obtiens

$$(83)\quad \int_a^b K_i(s_{\overline{m}'n+i}, t) f_2(x+t)\, dt < -\frac{29}{32}(4k+2) + \frac{3}{8}$$

$$\text{pour tout } i = 1, 2, \dots n.$$

Comme dans la démonstration du théorème III on a $\overline{m}(u) \to \infty$ pour $u \to 0$, c'est à dire pour $k \to \infty$, par suite en tenant compte de (82) et (83) j'obtiens pour tout $i = 1, 2, \dots n$ et tout $x \in M$:

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int_a^b K_i(s,t) f_2(x+t)\,dt = +\infty, \quad \underline{\lim_{s\to\infty}} \int_a^b K_i(s,t) f_2(x+t)\,dt = -\infty$$

pour $s \in S_i$, (car $S_{\overline{m}\,n+i} > 10^{\overline{m}+1}$, $S_{\overline{m}\,n+i} \in S_i$) c. q. f. d.

Corollaires — analogues à ceux relatifs au théorème III. En particulier *il existe une fonction absolument continue $\varphi(x)$ admettant la dérivée finie pour tout $x \in CM$, dont les deux dérivées supérieures de* Dini *sont égales à $+\infty$, les deux dérivées inférieures sont égales à $-\infty$ pour tout $x \in M$ (les points du type χ).* La fonction $f_1(x)$ permet de donner la réponse affirmative à la question [3]) posée par M. V. Jarnik (Tohôku Math. Journal, t. 37, p. 249, 1933) et je l'ai envoyée (sans les théorèmes concernant les noyaux) à Tohôku, au mois de mai 1941 (manuscrit mai 1940).

En appliquant la fonction $f_1(x)$ il résulte aussitôt la résolution suivante du problème de M. Fréchet: *Tout arc simple, ayant la tangente* (partout. p. ex.; ce n'est pas nécessaire) *admet la représentation paramétrique* partout *dérivable, la dérivée étant finie.* M. A. J. Ward à démontré (Fund. Math, t. 28, p. 280—288) qu'il existe une représentation paramétrique *presque partout dérivable*, par un changement convenable du paramètre. En changeant le paramètre encore une fois avec l'application de la fonction $f_1(t)$ j'obtiens la résolution définitive (X 1940).

Il est facile d'atteindre que la somme des fonctions $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ soit intégrable avec F, à cet effet il suffit que chacune d'elles soit intégrable avec la fonction $F_1(y) = F(3y)$, car nous avons alors

$$F(|f_1(t)| + |f_2(t)| + |f_3(t)|) \leqslant F(3 \max\{|f_1(t)|, |f_2(t)|, |f_3(t)|\})$$

$$\int_u^v F(|f_1(t)| + |f_2(t)| + |f_3(t)|)\,dt \leqslant \int_{N_1} F(3|f_1(t)|)\,dt + \int_{N_2} F(3|f_2(t)|)\,dt + \int_{N_3} F(3|f_3(t)|)\,dt.$$

---

[3]) Existe-t-il une fonction continue, partout dérivable, dont la dérivée est égale à $+\infty$ aux points d'un ensemble G_δ de mesure nulle, arbitrairement choisi, et finie aux points de son complémentaire.

Par le changement du signe des fonctions f_1 on obtient une fonction pour laquelle $g_i(x) = -\infty$ pour tout $x \in M$; par l'addition des fonctions convenables on aboutit au théorème suivant:

Théorème VI. *À toute fonction $F(y)$ satisfaisant à (*), sur chaque couple d'ensembles disjoints, de mesure nulle, M_1 du type $G_{\delta\sigma}$ et M_2 du type G_δ et à tout système fini de noyaux $K_i(s,t)$, avec $s \in S_i$ (S_i étant un ensemble donné, non borné supérieurement, arbitraire d'ailleurs), satisfaisant aux conditions I, IV, VII, on peut attribuer une fonction $f(x)$ intégrable avec F, telle que toutes les opérations sont convergentes à une valeur finie de $f(x)$ pour tout $x \in C(M_1+M_2)$ et divergentes avec l'oscillation finie pour tout $x \in M_1$, avec l'oscillation infinie pour tout $x \in M_2$. Lorsque les noyaux satisfont aux conditions I, IV, VII*, à tous quatre ensembles disjoints, de mesure nulle, M_1 du type $G_{\delta\sigma}$, M_2, M_3 et M_4 du type G_δ on peut faire corerspondre une fonction $f(x)$ intégrable avec F, telle que toutes les opérations convergent à une valeur finie $f(x)$ pour tout $x \in C(M_1+M_2+M_3+M_4)$, à $+\infty$ pour tout $x \in M_3$, à $-\infty$ pour tout $x \in M_4$, divergent avec l'oscillation finie pour tout $x \in M_1$, avec l'oscillation infinie pour tout $x \in M_2$.*

Je pose les problèmes suivants:

1) Existe-t-il un noyau $K(s,t)$ non borné, éventuellement satisfaisant aux conditions I, IV, VII, tel que pour toute fonction $f(x)$ non bornée sur tous les ensembles de pleine épaisseur, on ait $\int_a^b |K(s,t)f(x+t)|\,dt = +\infty$ pour certaines valeurs de s et x?

2) Peut-on à tout ensemble M du type G_δ, de mesure nulle et à tout noyau $K(s,t)$ satisfaisant aux conditions I, IV, VII (et éventuellement à IX) associer une fonction $f(x)$ pour laquelle l'opération converge à $+\infty$ pour tout $x \in M$ et à une limite finie pour tout $x \in CM$? (ou M du type $F_{\sigma\delta}$, $|M| = 0$, $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}}\, g(s,x) < +\infty$ pour tout $x \in CM$).

3) Quand peut-on à plusieurs noyaux $K_1(s,t), \dots K_n(s,t)$ satisfaisant aux I, IV, VII, et aux ensembles $N_1, N_2, \dots N_n$

du type $G_{\delta\sigma}$, de mesure nulle, faire correspondre une fonction $f(t)$, telle que l'opération i-ème soit divergente pour tout $x \in N_i$ et converge pour tout $x \in CN_i$, $i = 1, 2, \dots n$?

Lorsque, par exemple, $n=2$ et $K_1(s,t)$ constitue le noyau de la sommabilité de la série de FOURIER par la méthode $(C,1)$, $K_2(s,t)$ — par la méthode $(C,2)$, alors il est nécessaire que $N_2 \subset N_1$; cependant on ne sait pas si cette condition est suffisante.

7. Pour certaines classes K de séries trigonométriques il existe un nombre $D(K) \in [0,1]$ tel que si $D(K)=0$, tous les séries de la classe K convergent presque partout et inversemment, lorsque $D(K)=1$, il existe une série de la classe K divergente presque partout à l'oscillation $+\infty$, et inversemment, en outre $D(K) = \lim\limits_{b\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} B(n,b)$, $b>0$, $n>0$, n entier, $B(n,b) =$

$$= \sqrt[n^3]{\sum_{m=n^3}^{\infty} \frac{M(n,m)}{b^{2nm}} (-1)^{m-n}},$$

m entier, $M(n,m) \geqslant 0$ étant des expressions finies, rationelles dépendants de K, et ne contenants outre n et m, que les constantes déterminées. Les classes K peuvent être suivantes: 1) la classe des séries à coefficients bornés, 2) la classe des séries à coefficients $O(a_r)$, $a_r > 0$, $a_r \to 0$, 3) la classe des séries de FOURIER-LEBESGUE, 4) la classe des séries de Fourier des fonctions à carré sommable (L^2), 5) la classe (L^α), $\alpha > 1$, 6) la classe des séries de Fourier des fonctions bornées (B) (resp. continues (C)). Pour la classe 4 (L^2) on peut admettre:

$$M(n,m) = (2n!)^m \sum_{\nu_{u,v}} \frac{(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\sum\limits_{l=1}^{k}(l-1)\sum\limits_{v=1}^{i} r_{l,k,v} \sum\limits_{u=1}^{n^3} \nu_{u,v}}}{\prod\limits_{v=1}^{i}\prod\limits_{u=1}^{n^3} \nu_{u,v}!} \prod_{v=1}^{i} \left(\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\prod\limits_{l=1}^{k} r_{l,k,v}!} \right)^{\sum\limits_{u=1}^{n^3} \nu_{u,v}} ACEF$$

où

$$A = \prod_{k=1}^{n+1} \prod_{l=1}^{k} \left(\sum_{r=l-1}^{k-1} \frac{(2k-1)!}{2r!(2k-2r-1)!} \, \frac{r!}{(l-1)!(r-l+1)!} \right)^{\sum\limits_{v=1}^{i} r_{l,k,v} \sum\limits_{u=1}^{n^3} \nu_{u,v}},$$

$$C = \prod_{u=1}^{n^3} \frac{p_u!}{2^{p_u} \left(\frac{p_u}{2}\right)!}$$

$$p_u = \sum_{v=1}^{i} v_{u,v} \sum_{t=0}^{n} (2t+1) \sum_{l=1}^{n+1-t} r_{l,t+l,v},$$

$$E = \prod_{v=1}^{i} J(a_0, a_1, \ldots a_n)^{\sum_{u=1}^{n^3} v_{u,v}}, \quad a_s = \sum_{l=1}^{s+1} r_{l,s+1,v},$$

$$J(a_0, a_1, \ldots a_n) = 1 \text{ pour } a_n \neq 0, \; J(a_0, a_1, \ldots a_t, a_{t+1}, \ldots a_n) = n - t + 1$$
$$\text{pour } a_t \neq 0, \; a_{t+1} = a_{t+2} = \ldots a_n = 0,$$

$$F = \prod_{k=1}^{n} \frac{q_k!\left(\sum_{s=k+1}^{n+1} q_s\right)!}{2^{\sum_{s=k}^{n+1} q_s}\left(\frac{q_k}{2}\right)!\left(\frac{\sum_{s=k+1}^{n+1} q_s}{2}\right)!\left(\frac{\sum_{s=k}^{n+1} q_s}{2}\right)!}, \quad q_k = \sum_{v=1}^{i}\left(\sum_{l=1}^{k} r_{l,k,v}\right)\left(\sum_{u=1}^{n^3} v_{u,v}\right).$$

Les nombres $r_{l,k,v}$ sont entiers non négatifs, tels que $\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l=1}^{k} r_{l,k,v} = 2n$. Quand v varie de 1 à i, nous obtenons tous ces systèmes, qui sont différrents entre eux par les valeurs numériques et par l'ordre, $v_{u,v}$ parcourt tous les systèmes de nombres entiers non négatifs (qui différent entre eux par les valeurs numériques et par l'ordre) satisfaisant aux conditions: $\sum_{v=1}^{i}\sum_{u=1}^{n^3} v_{u,v} = m$, $\sum_{v=1}^{i} v_{u,v} \geqslant 1$ pour tout u, tous les nombres $q_1, q_2 \ldots q_{n+1}$ sont pairs.

Evidemment $0 \leqslant D(C) = D(B) \leqslant D(L^\alpha) \leqslant D(L^1) = 1$ et n'est pas $0 < D(L^2) < 1$, $0 < D(C) < 1$. Je pose les problèmes: $D(L^2) = 1$?, $D(L^2) = 0$?, $D(C) = 1$?, $D(C) = 0$?

SUR UN PROBLÈME DE CARACTÈRE INTÉGRAL RELATIF À L'ÉQUATION:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

DÉFINIE DANS LE PLAN TOUT ENTIER

Par JACEK SZARSKI, Kraków

Introduction.

Considérons l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

M. T. WAŻEWSKI a démontré le théorème suivant[1]):

„Il existe un ensemble ouvert et simplement connexe Ω et une fonction $Q(x, y)$ possédant dans Ω des dérivées partielles continues de tous les ordres, tels que toute intégrale de (1) possédant des dérivées partielles continues du premier ordre et valable dans Ω tout entier est forcément constante".

L'ensemble Ω figurant dans le théorème de M. WAŻEWSKI est d'une structure assez compliquée. Or on serait tenté de supposer que la construction de la fonction $Q(x,y)$ n'est possible que justement grâce à cette structure compliquée de Ω. M. WAŻEWSKI m'a donc proposé de construire une fonction $Q(x, y)$ jouissant des propriétés analogues dans le plan tout entier. Mon travail présent a pour but la solution de ce problème.

---

[1]) T. Ważewski: *Sur un problème de caractére intégral relatif à l'équation:* $\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, Mathematica, Volumul VIII, p. 103—116.

Théorème principal 1. Il existe une fonction $Q(x, y)$ possédant, dans le plan tout entier, des dérivées partielles continues de tous les ordres telle que chaque intégrale de l'équation (1) possédant des dérivées partielles continues du premier ordre et valable dans le plan tout entier est forcément constante.

Théorème 2. Il existe une fonction $Q(x,y)$ jouissant des propriétés analogues dans le carré: $|x| < a$; $|y| < a$ (a est un nombre fini).

I. Nous en allons effectuer la démonstration en plusieurs étapes. Pour la simplifier nous introduirons d'abord quelques définitions et nous démontrerons quelques lemmes préliminaires.

Définition 1. Une fonction $f(x,y)$ définie dans un ensemble Z sera appelée, dans la suite, fonction de classe C^n, lorsqu'elle possède des dérivées partielles continues de l'ordre n dans l'ensemble Z. Elle sera appelée fonction de classe C^∞, lorsqu'elle possède dans l'ensemble envisagé des dérivées partielles continues de tous les ordres.

Définition 2. Supposons que la fonction $Q(x,y)$ soit définie dans un ensemble ouvert Ω. Une fonction quelconque $z(x, y)$ sera appelée intégrale de l'équation (1) dans l'ensemble E ouvert, contenu dans Ω, si:

α) $z(x, y)$ satisfait à l'équation (1) dans l'ensemble E.

β) $z(x, y)$ possède la différentielle totale pour tout point de l'ensemble E.

Nous entendons par la condition β) que, pour tout point $(x_0, y_0) \in E$, il existe une fonction $\varepsilon(x, y)$ satisfaisant à l'implication suivante:

$$(x, y) \to (x_0, y_0) \cdot \supset \cdot \varepsilon(x, y) \to 0 \tag{2}$$

et telle que l'identité:

$$\begin{aligned} z(x, y) = z(x_0, y_0) + z_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ + \varepsilon(x, y)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{aligned} \tag{3}$$

subsiste pour tous les points appartenant à un voisinage suffisamment petit du point (x_0, y_0).

Définitions 3[2]). Supposons que: $(x_0, y_0) \in E \subset \Omega$.

Nous dirons que le point (x_0, y_0) est *horizontal* par rapport à la fonction $Q(x,y)$ et à l'ensemble E lorsque, pour toute intégrale (cf. déf. 2) $z(x,y)$ de l'équation (1), valable dans E, on aura:

$$z_y(x_0, y_0) = 0\,.$$

En vertu de l'équation (1) on aura alors aussi:

$$z_x(x_0, y_0) = 0\,.$$

Lemme 1. Supposons que: $(x_0, y_0) \in E_1 \subset E \subset \Omega$.

Il résulte immédiatement de la déf. 3, que si le point (x_0, y_0) est horizontal par rapport à la fonction Q et à l'ensemble E_1, il l'est aussi par rapport à la fonction Q et à l'ensemble E.

II. On sait que:

$$\frac{dy}{dx} = Q(x, y) \tag{4}$$

est l'équation des caractéristiques de l'équation (1).

Lemme 2. Supposons que $\vartheta(x)$ soit une caractéristique de l'équation (1), définie dans l'intervalle:

$$a' < x < b' \tag{5}$$

et située dans l'ensemble ouvert $E \subset \Omega$, et que $Q(x,y)$ soit de classe C^1.

Nous affirmons que, si le point $\big(x_0, \vartheta(x_0)\big)$, (où x_0 appartient à (5)) est horizontal par rapport à la fonction Q et à l'ensemble E (cf. déf. 3), tous les points situés sur la caractéristique envisagée jouissent de la propriété analogue.

Démonstration. Soit $z(x,y)$ une intégrale quelconque (cf. déf. 2) de l'équation (1) valable dans E. Désignons par: $y = \hat{y}(x,\xi,\eta)$, la caractéristique de l'équation (1) passant par le point (ξ,η). Nous aurons alors:

$$\vartheta(x) = \hat{y}\big(x, x_0, \vartheta(x_0)\big)\,. \tag{6}$$

Soit $\overset{*}{x}$ un nombre quelconque appartenant à l'intervalle (5).

---

[2]) Cette définition a été introduite par M. Ważewski dans son travail cité dans la remarque [1]).

Comme on le sait[3]), il existe un nombre positif $\delta > 0$, tel que si:

(7) $$|\eta - \vartheta(x_0)| < \delta$$

alors la caractéristique $\hat{y}(x, x_0, \eta)$ est définie et située dans E, pour $x_0 \leqslant x \leqslant \overset{*}{x}$.

En vertu d'un théorème bien connu[4]) nous avons l'égalité:

(8) $$z(x_0, \eta) = z\big(x, \hat{y}(x, x_0, \eta)\big)$$

pour tout x, pour lequel la caractéristique $\hat{y}(x, x_0, \eta)$ existe, étant située dans E.

Pour η satisfaisant à l'inégalité (7), nous avons, en particulier:

(9) $$z(x_0, \eta) = z\big(\overset{*}{x}, \hat{y}(\overset{*}{x}, x_0, \eta)\big).$$

En différentiant l'identité (9) par rapport à η et en posant $\eta = \vartheta(x_0)$, nous obtenons la relation:

(10) $$z_y\big(x_0, \vartheta(x_0)\big) = z_y\big(\overset{*}{x}, \hat{y}(\overset{*}{x}, x_0, \vartheta(x_0))\big) \frac{\partial \hat{y}\big(\overset{*}{x}, x_0, \vartheta(x_0)\big)}{\partial \eta}.$$

Selon notre supposition nous avons: (cf. déf. 3)

$$z_y\big(x_0, \vartheta(x_0)\big) = 0$$

et d'après la relation (6):

$$\hat{y}\big(\overset{*}{x}, x_0, \vartheta(x_0)\big) = \vartheta(\overset{*}{x}),$$

L'égalité (10) prend donc la forme:

$$z_y\big(\overset{*}{x}, \vartheta(\overset{*}{x})\big) \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial \eta} = 0.$$

Mais $\frac{\partial \hat{y}}{\partial \eta}$ étant toujours différente de zéro[5]), nous en concluons que:

---

[3]) Kamke: *Differentialgleichungen reeler Funktionen*, p. 87; Satz 4, Leipzig 1930. (Puisque nous aurons à citer, à plusieurs reprises, le manuel sus-mentioné, nous nous servirons, dans la suite, de la notation raccourcie: Kamke: *D. r. F.*).

[4]) Kamke: *D. r. F.*: p. 298; Satz 1.

[5]) Kamke: *D. r. F.*: p. 155, Satz 1.

$$z_y\big(\overset{*}{x}, \vartheta(\overset{*}{x})\big) = 0$$

$\overset{*}{x}$ étant un nombre quelconque de l'intervalle (5) la démonstration se trouve ainsi terminée.

III. Soient $g_1(x)$ et $g_2(y)$ deux fonctions de classe C^1 définies respectivement dans les intervalles: $a_1 < x < \widetilde{a}_1$; $a_2 < y < \widetilde{a}_2$ ($a_1, \widetilde{a}_1, a_2, \widetilde{a}_2$ finis ou infinis). Supposons que les dérivées des fonctions g_1 et g_2 satisfassent aux inégalités:

(11) $$g_2'(x) \neq 0, \quad g_2'(y) \neq 0.$$

Introduisons la transformation:

(T) $$\bar{x} = g_1(x)$$
$$\bar{y} = g_2(y)$$

et supposons que l'ensemble:

(12) $$a_1 < x < \widetilde{a}_1; \quad a_2 < y < \widetilde{a}_2$$

soit transformé par l'intermédiaire de T en ensemble Ω.

En vertu des inégalités (11) la transformation T admet une transformation inverse bien définie. Désignons — la par:

(T^{-1}) $$x = g_1^{-1}(\bar{x})$$
$$y = g_2^{-1}(\bar{y}).$$

Considérons maintenant l'équation:

(13) $$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{Q\big(g_1(x), g_2(y)\big) \cdot g_1'(x)}{g_2'(y)} = 0.$$

Lemme 3. Nous affirmons que pour toute intégrale (cf. déf. 2) $z(x,y)$ de l'équation (13), valable dans l'ensemble (12), il existe une intégrale $\bar{z}(\bar{x}.\bar{y})$ de l'équation (1) valable dans Ω telle qu'on ait l'identité:

(14) $$z(x,y) \equiv \big[\bar{z}(\bar{x},\bar{y})\big]_T \text{ dans l'ensemble (12).}$$

Soit, en effet, $z(x,y)$ une intégrale quelconque de l'équation (13) dans l'ensemble (12). Définissons la fonction $\bar{z}(\bar{x},\bar{y})$ par la formule:

(15) $$\bar{z}(\bar{x},\bar{y}) \overset{\text{df}}{=} \big[z(x,y)\big]_{T^{-1}}.$$

Il est clair que la fonction $\bar{z}(\bar{x},\bar{y})$ ainsi définie possède la différentielle totale pour tout point de l'ensemble Ω et qu'en vertu de (15), l'identité (14) est remplie. Pour démontrer notre lemme il suffit donc de prouver que la fonction $\bar{z}(\bar{x},\bar{y})$ satisfait à (1). D'après (15) nous avons des identités:

$$(16)\qquad \frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{x}}=\left[\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{1}{g_1'(x)}\right]_{T^{-1}};\quad \frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{y}}=\left[\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{1}{g_2'(y)}\right]_{T^{-1}}.$$

Il résulte de (13) et de (16) qu'on a:

$$\frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{x}}=-\left[\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{1}{g_2'(y)}\cdot Q\big(g_1(x),g_2(y)\big)\right]_{T^{-1}}=-\frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{y}}Q(\bar{x},\bar{y})$$

ce qui termine la démonstration.

IV. Nous définirons maintenant une fonction $\Gamma(X,Y)$ dont nous allons nous servir, dans la suite, à plusieurs reprises.

Posons d'abord:

$$\Delta(x)\overset{\mathrm{df}}{=}e^{-\frac{1}{x^2}}.\quad \text{pour } x\neq 0$$
$$\Delta(x)\overset{\mathrm{df}}{=}0\qquad ,,\quad x=0\,.$$

On sait que la fonction $\Delta(x)$, ainsi définie est de classe C^∞ sur la droite numérique toute entière et qu'elle s'annule avec toutes ses dérivées pour $x=0$.

Sur le plan dépourvu du point $X=Y=0$, je définis ensuite la fonction $\Gamma(X,Y)$ par des relations suivantes:

$$\Gamma(X,Y)\overset{\mathrm{df}}{=}\Delta\left(\frac{X}{Y}\right)\quad \text{pour } Y\neq 0$$
$$\Gamma(X,Y)\overset{\mathrm{df}}{=}\ 1\qquad ,,\quad Y=0\,.$$

Lemme 4. Soient $X(x,y)$ et $Y(x,y)$ deux fonctions de classe C^∞ dans un ensemble ouvert Ω_1, et supposons qu'elles remplissent l'implication suivante:

$$(17)\qquad (x,y)\in\Omega_1\cdot Y(x,y)=0\cdot\supset\cdot X(x,y)\neq 0\,.$$

Ceci étant supposé considérons la fonction:

$$(18)\qquad \bar{\Gamma}(x,y)\overset{\mathrm{df}}{=}\Gamma\big(X(x,y),\ Y(x,y)\big).$$

Nous affirmons que:

1°. La fonction $\bar{\Gamma}(x,y)$ est de classe C^∞ dans Ω_1.

2°. Si $(x_0, y_0) \in \Omega_1$, et si $X(x_0, y_0) = 0$, alors la fonction $\bar{\Gamma}$ s'annule avec toutes ses dérivées en ce point.

3°. Si $(x_1, y_1) \in \Omega_1$, et si la fonction $Y(x, y)$ ainsi que toutes ses dérivées s'annulent en ce point, alors toutes les dérivées de la fonction $\bar{\Gamma}$ y sont égales à zéro.

Soit, en effet, (x_0, y_0) un point quelconque appartenant à Ω_1 et supposons qu'on ait $Y(x_0, y_0) \neq 0$. En tenant compte: 1) de la définition des fonctions $\bar{\Gamma}$ et Γ, 2) des propriétés plus haut citées de la fonction Δ, et 3) de la formule pour les dérivées de la fonction composée, nous concluons, sans difficulté, que toutes les dérivées de la fonction $\bar{\Gamma}$ sont continues en ce point et jouissent de la propriété 2°.

Supposons maintenant que, pour un point quelconque $(x_1, y_1) \in \Omega_1$, on ait $Y(x_1, y_1) = 0$. En vertu de l'implication (17) nous avons alors $X(x_1, y_1) \neq 0$. Dans un voisinage suffisamment petit du point (x_1, y_1) la fonction $\bar{\Gamma}$ se laisse donc écrire en forme:

$$(19) \qquad \bar{\Gamma}(x,y) = e^{-\left(\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}\right)^2}.$$

On vérifie que la fonction (19) possède dans le voisinage envisagé toutes les dérivées continues et que la dérivée $\frac{\partial^n \bar{\Gamma}(x,y)}{\partial x^p \partial y^q}$ a la forme:

$$\frac{\partial^n \bar{\Gamma}(x,y)}{\partial x^p \partial y^q} = \sum_{i=1}^{3n} P_i^{(n,p,q)}\left(X(x,y),\, Y(x,y),\, \frac{\partial X(x,y)}{\partial x}, \dots\dots, \frac{\partial^n Y(x,y)}{\partial x^p \partial y^q}\right) \frac{e^{-\left(\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}\right)^2}}{\left[X(x,y)\right]^i}.$$

Les fonctions $P_i^{(n,p,q)}$ s'annulent identiquement ou bien sont des polynômes dont chaque membre possède comme facteur soit la fonction $Y(x,y)$ elle même, soit une de ses dérivées. Il en résulte que les dérivées de la fonction $\bar{\Gamma}$ satisfont à la condition 3°.

V. Nous démontrerons, à présent, un lemme dont nous allons faire usage à plusieurs reprises.

Lemme 5. Soit $f(x,y)$ une fonction de classe C^∞ dans un rectangle ouvert. Considérons l'équation différentielle ordinaire:

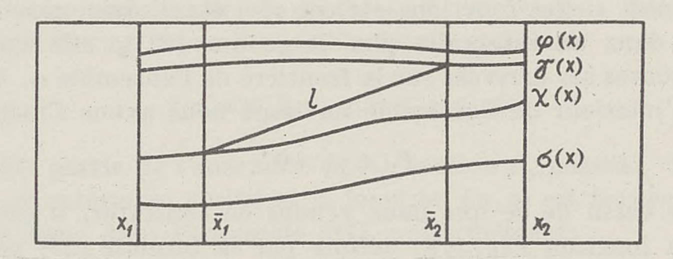
$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \tag{20}$$

Supposons que les fonctions $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\sigma(x)$ soient trois intégrales de l'équation (20) situées à l'intérieur du rectangle envisagé et définies dans l'intervalle fermé:

$$x_1\leqslant x\leqslant x_2 \quad (x_1<x_2). \tag{21}$$

Supposons, en plus, qu'on ait dans l'intervalle (21) des inégalités:

$$\varphi(x)>\chi(x)>\sigma(x). \tag{22}$$



Désignons par ω l'ensemble défini par des inégalités:

$$(\omega)\qquad x_1\leqslant x\leqslant x_2;\quad \sigma(x)\leqslant y\leqslant\varphi(x).$$

et définissons la fonction $\Gamma_1(x,y)$ par la relation:

$$\Gamma_1(x,y)\overset{\mathrm{df}}{=}\Delta\left(\sin\frac{y-\sigma(x)}{\varphi(x)-\sigma(x)}\pi\cdot\sin\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\pi\right)\quad\text{(cf. l'alinéa IV).}$$

Posons maintenant:

$$\left.\begin{aligned} &F(\varrho,x,y)\overset{\mathrm{df}}{=}f(x,y)+\varrho\,\Gamma_1(x,y) && \text{pour } (x,y)\in\omega\\ &F(\varrho;x,y)\overset{\mathrm{df}}{=}f(x,y) && \text{pour tout autre point du rectangle}\end{aligned}\right\}-\infty<\varrho<+\infty. \tag{23}$$

Nous affirmons que la fonction $F(\varrho; x, y)$ ainsi définie jouit des propriétés suivantes:

v_1) $F(\varrho, x; y)$ est de classe C^∞ dans le rectangle et pour $-\infty < \varrho < +\infty$.

v_2) Pour tout ϱ, $\varphi(x)$ et $\sigma(x)$ sont intégrales de l'équation:

$$(e_\varrho) \qquad \frac{dy}{dx} = F(\varrho; x, y).$$

v_3) Désignons par $\overline{\chi}(\varrho; x)$ l'intégrale de l'équation (e_ϱ) passant par le point $\big(x_1, \chi(x_1)\big)$. La fonction $y = \overline{\chi}(\varrho; x_2)$[6]) détermine alors une transformation continue et biunivoque de la droite numérique en intervalle:

$$\sigma(x_2) < y < \varphi(x_2).$$

En vertu des propriétés de la fonction $\Delta(x)$, la fonction $\Gamma_1(x, y)$ est de classe C^∞ dans un ensemble ouvert contenant l'ensemble ω (les fonctions $\sigma(x)$ et $\varphi(x)$ étant évidemment définies dans un intervalle plus large que (21)), elle s'annule avec toutes ses dérivées sur la frontière de l'ensemble ω, tandis qu'à l'intérieur de l'ensemble envisagé nous avons l'inégalité:

$$(24) \qquad \Gamma_1(x, y) > 0 .$$

En vertu de ce que nous venons de constater, il est clair que la fonction $F(\varrho; x, y)$ définie par la formule (23) possède les propriétés v_1) et v_2).

Quant à la propriété v_3), remarquons d'abord que, d'après un théorème bien connu [7]), la fonction $\overline{\chi}(\varrho; x_2)$ est de classe C^∞ sur la droite numérique et qu'en vertu de (24) on a l'inégalité: $\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial \varrho}(\varrho; x_2) > 0$.

Pour terminer la démonstration de notre lemme il suffit donc de prouver qu'on a:

$$\lim_{\varrho \to +\infty} \overline{\chi}(\varrho; x_2) = \varphi(x_2); \quad \lim_{\varrho \to -\infty} \overline{\chi}(\varrho; x_2) = \sigma(x_2).$$

---

[6]) En vertu de la propriété (v_2) et de l'unicité de l'équation (e_ϱ) toute intégrale de cette équation passant par un point situé dans l'ensemble ω est définie dans (21).

[7]) Kamke: *D. r. F.*: p. 161, § 88.

Nous nous bornerons à la démonstration de la première de ces relations, la seconde se laissant démontrer d'une façon analogue.

Remarquons d'abord qu'en vertu de (24) on a dans le rectangle et pour $\varrho > 0$ l'inégalité:

$$F(\varrho; x, y) \geqslant f(x, y). \tag{25}$$

Soit $\varepsilon > 0$, un nombre quelconque positif. Désignons par $\gamma(x)$ une intégrale de l'équation (20) définie dans l'intervalle (21) et y satisfaisant aux inégalités:

$$\begin{gathered} \varphi(x) - \varepsilon < \gamma(x) < \varphi(x) \\ \chi(x) < \gamma(x) \end{gathered} \tag{26}$$

(en vertu de l'unicité de l'équation (20) une telle intégrale existe[8]) pourvu qu'on en choisisse convenablement le point de départ).

Fixons ensuite deux nombres $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ tels qu'on ait $x_1 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < x_2$. Dans l'ensemble fermé et borné:

$$\bar{x}_1 \leqslant x \leqslant \bar{x}_2; \quad \chi(x) \leqslant y \leqslant \gamma(x) \tag{27}$$

qui fait partie de l'ensemble ω, la fonction Γ_1 possède, d'après (24), un minimum positif et la fonction $f(x, y)$ est bornée. Nous avons donc dans l'ensemble (27), uniformément:

$$\lim_{\varrho \to +\infty} F(\varrho; x, y) = +\infty. \tag{28}$$

Désignons par l, la droite passant par les points $(\bar{x}_1, \chi(\bar{x}_1))$, $(\bar{x}_2, \gamma(\bar{x}_2))$ et choisissons un $\varrho_0 > 0$ de façon qu'on ait l'inégalité:

$$F(\varrho; x, y) > \frac{\gamma(\bar{x}_2) - \chi(\bar{x}_1)}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} \text{ dans l'ensemble (27), pour } \varrho \geqslant \varrho_0. \tag{29}$$

Pour $\varrho \geqslant \varrho_0$ et $x \geqslant \bar{x}_1$ l'intégrale $\delta(\varrho; x)$ de l'équation (e_ϱ) passant par le point $(\bar{x}_1, \chi(\bar{x}_1))$ est située, en vertu de l'inégalité (25), au dessus de l'intégrale $\chi(x)$[9]). D'autre part il résulte

---

[8]) Kamke: *D. r. F.*: p. 87, Satz 4.

[9]) Kamke: *D. r. F.*: p. 91, Satz 4.

de l'inégalité (29) que l'intégrale $\delta(\varrho; x)$, tant qu'elle se trouve dans l'ensemble (27), est située au dessus de la droite l. L'intégrale $\delta(\varrho; x)$ arrivant[10]) jusqu'à la frontière de l'ensemble (27) nous en concluons qu'elle coupe l'intégrale $\gamma(x)$ dans un certain point de l'abcisse $\tilde{x}$, oú $\bar{x}_1 < \tilde{x} \leqslant \bar{x}_2$. En vertu de l'inégalité (25) nous ayons donc[9]) $\delta(\varrho; x) \geqslant \gamma(x)$ pour $x \geqslant \tilde{x}$, d'où il résulte, d'après (26), qu'on a l'inégalité:

$$\delta(\varrho; x_2) > \varphi(x_2) - \varepsilon. \tag{30}$$

D'après (25) nous avons, dans l'intervalle (21), l'inégalité[9]): $\overline{\chi}(\varrho; x) \geqslant \chi(x)$ et, en particulier, l'inégalité: $\overline{\chi}(\varrho; \bar{x}_1) \geqslant \chi(\bar{x}_1) = \delta(\varrho; \bar{x}_1)$.
Il en résulte, en vertu de l'unicité de l'équation (e_ϱ), qu'on a:

$$\overline{\chi}(\varrho; x) \geqslant \delta(\varrho; x) \quad \text{dans l'intervalle (21), pour } \varrho \geqslant \varrho_0. \tag{31}$$

En rapprochant les inégalités (30) et (31) nous obtenons l'inégalité:

$$\chi(\varrho; x_2) > \varphi(x_2) - \varepsilon \quad \text{pour } \varrho \geqslant \varrho_0. \tag{32}$$

D'autre part nous avons, en vertu de l'unicité de l'équation (e_ϱ) et de la propriété v_2), l'inégalité:

$$\overline{\chi}(\varrho; x_2) < \varphi(x_2). \tag{33}$$

Des inégalités (32) et (33) nous obtenons la relation:

$$|\overline{\chi}(\varrho; x_2) - \varphi(x_2)| < \varepsilon \quad \text{pour } \varrho \geqslant \varrho_0. \tag{34}$$

ce qui termine la démonstration.

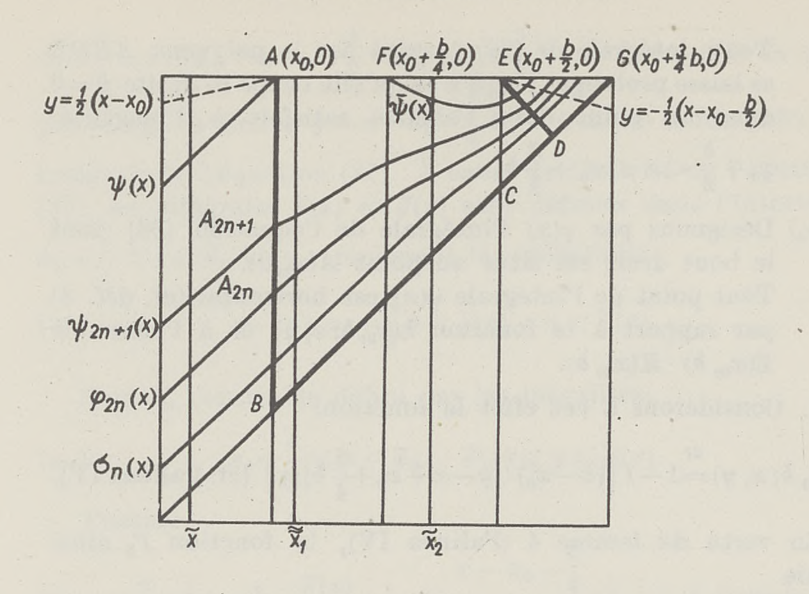
Remarque 1. Supposons que l'intégrale $\chi(x)$ soit constante. On a alors: $0 = \chi'(x) = f(x, \chi(x))$ et par conséquent:

$$F(-1; x, \chi(x)) = -\Gamma_1(x, \chi(x)). \tag{35}$$

En nous rappelant l'inégalité (24) nous voyons que la fonction $F(-1; x, \chi(x))$ est négative pour $x_1 < x < x_2$.

---

[10]) Kamke: *D. r. F.*: p. 75, Satz 2.



Désignons par $K(x_0, b)$ le carré défini par les inégalités:

$$x_0 - \frac{b}{4} < x < x_0 + \frac{3}{4} b; \quad -b < y < 0 \qquad (K(x_0, b)).$$

Soit $Z(x_0, b)$ l'ensemble défini par les relations:

$$y < \frac{1}{2}(x - x_0); \quad y < 0; \quad y < -\frac{1}{2}\left(x - x_0 - \frac{b}{2}\right) \; Z((x_0, b)).$$

Nous construisons dans le carré $K(x_0, b)$ le polygone $ABDE$:

$$x_0 \leqslant x; \quad x - x_0 - \frac{3}{4} b \leqslant y \leqslant 0; \quad y \leqslant -\left(x - x_0 - \frac{b}{2}\right) \qquad (ABDE).$$

Désignons ensuite par $H(x_0, b)$, le carré $K(x_0, b)$ moins le polygone $ABDE$. Notre but consiste à définir une fonction $h(x_0, b; x, y)$ jouissant des propriétés suivantes:

w_1) $h(x_0, b; x, y)$ est de classe C^∞ (par rapport aux variables x, y) dans le carré $K(x_0, b)$.

w_2) $h(x_0, b; x, y) \equiv 1$ dans l'ensemble $H(x_0, b)$.

w_3) Considérons l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = h(x_0, b; x, y). \tag{36}$$

Toute intégrale de (36) passant par le polygone $ABDE$ se laisse prolonger jusqu'à ce qu'elle coupe la droite $y=0$ dans un point dont l'abcisse satisfait à l'inégalité: $x_0+\frac{b}{2}<x\leqslant x_0+\frac{3}{4}b$.

w_4) Désignons par $\psi(x)$ l'intégrale de l'équation (36) dont le bout droit est situé au point $A(x_0,0)$.
Tout point de l'intégrale $\psi(x)$ est horizontal (cf. déf. 3) par rapport à la fonction $h(x_0,b;x,y)$ et à l'ensemble $Z(x_0,b)\cdot K(x_0,b)$.

1. Considérons à cet effet la fonction:

$$\Gamma_2(x_0,b;x,y)\overset{\mathrm{df}}{=}1-\Gamma\Big((x-x_0)\cdot(y-x+x_0+\frac{3}{4}b);y\Big) \text{ (cf. l'alinéa IV).}$$

En vertu du lemme 4 (l'alinéa IV), la fonction Γ_2 ainsi définie

a_1) est de classe C^∞ dans le plan tout entier, moins les points: $A(x_0,0)$, $G(x_0+\frac{3}{4}b,0)$.

a_2) est égale à 1 et toutes ses dérivées s'annulent sur les droites AB et BD, moins les points A et G.

a_3) s'annule sur la droite $y=0$, moins les points A et G.

Adressons nous à l'équation:

$$\frac{dy}{dx}=\Gamma_2(x_0,b;x,y). \tag{37}$$

Nous allons appliquer à cette équation le lemme 5 (cf. l'alinéa V).

Posons, à cet effet, $\tilde{\chi}(x)=0$, pour $x_0+\frac{b}{4}\leqslant x<x_0+\frac{3}{4}b$. La fonction $\tilde{\chi}(x)$ est, en vertu de la propriété a_3), intégrale de l'équation (37) dans l'intervalle envisagé. Désignons par $\tilde{\varphi}(x)$ et $\tilde{\sigma}(x)$ deux intégrales de l'équation (37) passant respectivement par les points: $(x_0+\frac{b}{4},y_2)$, $(x_0+\frac{b}{4},y_1)$, (où $-\frac{b}{2}<y_1<0<y_2$ et y_2 est suffisamment petit) et considérons — les dans l'intervalle:

$x_0+\frac{b}{4}\leqslant x\leqslant\tilde{x}_0$ (où $x_0+\frac{b}{2}<\tilde{x}_0<x_0+\frac{3}{4}b$). En vertu de la propriété a_2), la droite $y=x-x_0-\frac{3}{4}b$ (c. à d. la droite BD) est intégrale de l'équation (37). À cause de l'unicité de l'équation (37), les intégrales $\tilde{\varphi}(x)$ et $\tilde{\sigma}(x)$ sont définies dans l'intervalle $x_0+\frac{b}{4}\leqslant x\leqslant\tilde{x}_0$ et y remplissent les inégalités:

$$y-x+x_0+\frac{3}{4}b<\tilde{\sigma}(x)<0<\tilde{\varphi}(x). \tag{38}$$

Soit ω_0 l'ensemble défini par les inégalités:

$$x_0+\frac{b}{4}\leqslant x\leqslant\tilde{x}_0;\quad \tilde{\sigma}(x)\leqslant y\leqslant\tilde{\varphi}(x). \tag{ω_0}$$

Posons:

$$\Gamma_3(x,y)\overset{\mathrm{df}}{=}\Delta\left(\sin\frac{y-\tilde{\sigma}(x)}{\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\sigma}(x)}\pi\cdot\sin\frac{x-x_0-\frac{b}{4}}{\tilde{x}_0-x_0-\frac{b}{4}}\pi\right)\quad\text{(cf. l'alinéa V).}$$

et définissons la fonction $\Gamma_4(x_0,b;x,y)$ par des relations:

$$\begin{aligned}&\Gamma_4(x_0,b;x,y)\overset{\mathrm{df}}{=}\Gamma_2(x_0,b;x,y)-\Gamma_3(x,y)\quad\text{dans l'ensemble }\omega_0\\&\Gamma_4(x_0,b;x,y)\overset{\mathrm{df}}{=}\Gamma_2(x_0,b;x,y)\qquad\text{pour tout autre point.}\end{aligned}\tag{39}$$

Il est clair, d'après le lemme 5, que la fonction Γ_4 possède la propriété a_1). En vertu des inégalités (38), l'ensemble $\omega_0.\,K(x_0,b)$ est situé à l'intérieur du triangle ABG. Il en résulte, d'après la définition (39) et les propriétés a_2) et a_3) de la fonction Γ_2, que la fonction Γ_4 jouit aussi de la propriété a_2) et qu'on a l'identité:

$$\Gamma_4(x_0,b;x,0)=0\quad\text{pour } x_0<x\leqslant x_0+\frac{b}{4}. \tag{40}$$

D'après la déf. (39) et la propriété a_3) de la fonction Γ_2 et en vertu de la remarque 1 (cf. l'alinéa V), nous avons, en plus, l'inégalité:

$$\Gamma_4(x_0,b;x,0)<0\quad\text{pour } x_0+\frac{b}{4}<x<\tilde{x}_0. \tag{41}$$

Considérons, maintenant, l'équation:

$$(42) \qquad \frac{dy}{dx} = \Gamma_4(x_0, b; x, y)$$

et soit $\overline{\psi}(x)$ l'intégrale de cette équation passant par le point $F(x_0+\frac{b}{4}, 0)$. D'après ce que nous venons de constater, les intégrales de l'équation (42) jouissent des propriétés suivantes:

a_4) $\overline{\psi}(x)$ est identique avec la droite $y=0$, pour $x_0 < x \leqslant x_0+\frac{b}{4}$, tandis que, pour $x_0+\frac{b}{4} < x \leqslant x_0+\frac{b}{2}$, l'intégrale $\overline{\psi}(x)$ est située à l'intérieur du carré $K(x_0, b)$ (cf. les relations (40) et (41)).

a_5) Toute intégrale de l'équation (42) passant par le polygone $ABCE$ arrive au segment CE, au dessous du point E.

Pour les intégrales partant des points situés au dessus de l'intégrale $\overline{\psi}(x)$, la propriété a_5) résulte de l'unicité de l'équation (42) ainsi que de l'inégalité (41). Pour toute autre intégrale passant par le polygone $ABCE$, la propriété a_5) découle de l'unicité de l'équation envisagée, la droite BD étant, en vertu de la propriété a_2), intégrale de (42).

2. Nous définirons maintenant la fonction $\Gamma_5(x_0, b; x, y)$ de façon suivante:

$$\Gamma_5(x_0, b; x, y) \overset{\mathrm{df}}{=} 1 + \Big((\Gamma_4(x_0, b; x, y) - 1\Big) \cdot \Big[\Gamma\Big(y - x + x_0 + \frac{b}{2}; \Delta(x - x_0 - \frac{b}{2})\Big)\Big].$$

D'après le lemme 4 (cf. l'alinéa IV) et en vertu des propriétés a_1) et a_2) dont jouit la fonction Γ_4, nous concluons que:

a_6) Γ_5 est de classe C^∞ sur le plan tout entier, moins les points: A, E et G.

a_7) Γ_5 est égale à 1 et toutes ses dérivées s'annulent sur les segments: CD et DE (à l'exc. de E),

a_8) sur le segment CE (moins le point E) la fonction Γ_5 est égale à la fonction Γ_4 et toutes ses dérivées sont égales aux dérivées respectives de la fonction Γ_4.

Posons:

$h_1(x_0, b; x, y) \overset{\text{df}}{=} 1$ dans l'ensemble $H(x_0, b)$,

$h_1(x_0, b; x, y) \overset{\text{df}}{=} \Gamma_4(x_0, b; x, y)$ dans le polygone $ABCE$ fermé (moins A et E).

$h_1(x_0, b; x, y) \overset{\text{df}}{=} \Gamma_5(x_0, b; x, y)$ dans le triangle CDE fermé (moins E).

En vertu des propriétés a_1), a_2), a_5), de la fonction Γ_4 et des propriétés a_6), a_7) et a_8) de la fonction Γ_5, nous constatons, sans difficulté, que la fonction $h_1(x_0, b; x, y)$ ainsi définie jouit des propriétés w_1), w_2) et w_3).

3. Il reste encore à modifier la fonction h_1 de façon que, tout en jouissant des propriétés w_1), w_2) et w_3), elle en possède aussi celle de w_4). Considérons, à cet effet, l'équation:

(43) $$\frac{dy}{dx} = h_1(x_0, b; x, y).$$

Soit $A_n(x_0, y_n)$ une suite monotone de points situés sur le segment AB pour laquelle on ait:

(44) $$y_n \to 0 \qquad (y_\nu < 0; \quad y_\nu < y_{\nu+1}, \quad \nu\, 1, 2, \ldots).$$

Désignons par $\psi_n(x)$, l'intégrale de (43) passant par le point $A_n(x_0, y_n)$ et soit $\psi(x)$ l'intégrale de (43) dont le bout droit est situé au point $A(x_0, 0)$. Il résulte de la définition de la fonction h_1 qu'on a:

(45) $$\psi(x) = x - x_0; \quad \psi_n(x) = y_n + x - x_0 \quad \text{pour } x_0 - \frac{b}{4} < x \leqslant x_0.$$

Fixons un nombre $\widetilde{x}_1$ pour lequel on ait:

(46) $$x_0 - \frac{b}{4} < \widetilde{x}_1 < x_0.$$

D'après (44) et (45) nous avons alors:

(47) $$\psi_n(\widetilde{x}_1) \to \psi(\widetilde{x}_1).$$

Soit $\widetilde{\widetilde{x}}_1$ un nombre fixe appartenant à l'intervalle: $x_0 < x < x_0 + \frac{b}{4}$.

On constate, sans difficulté, que:

(48) $$h_1(x_0, b; x, y) \geqslant 0 \quad \text{pour } x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{b}{4}.$$

et en particulier:

(49) $$\psi_n'(x) = h_1(x_0, b; x, \psi_n(x)) \geqslant 0 \quad \text{pour } x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{b}{4}.$$

Il en résulte l'inégalité:

(50) $$\psi_n(\tilde{\tilde{x}}_1) \geqslant \psi_n(x_0) = y_n.$$

D'autre part nous avons évidemment l'inégalité $\psi_n(\tilde{\tilde{x}}_1) < 0$. Nous en concluons, d'après (44) et (50) que:

(51) $$\psi_n(\tilde{\tilde{x}}_1) \to 0.$$

Il résulte de la définition de h_1 que l'intégrale $\overline{\psi}(x)$ de l'équation (42) (qu'on se souvienne que nous avons désigné par $\overline{\psi}(x)$ l'intégrale de l'équation (42) passant par le point F) est aussi intégrale de l'équation (43) dans l'intervalle: $x_0 < x \leqslant x_0 + \frac{b}{2}$. Nous en concluons, en vertu de la propriété a_4), que le point $(\tilde{\tilde{x}}_1, 0)$ est situé sur l'intégrale $\overline{\psi}(x)$ de l'équation (43). Soit $\tilde{x}_2$ un nombre pour lequel on ait:

(52) $$x_0 + \frac{b}{4} < \tilde{x}_2 \leqslant x_0 + \frac{b}{2}.$$

En vertu d'un théorème bien connu [11]) nous avons alors, d'après (51),

(53) $$\psi_n(\tilde{x}_2) \to \overline{\psi}(\tilde{x}_2).$$

En vertu de la relation (53), nous pouvons supposer, pourvu que la suite y_n fût convenablement choisie, qu'on ait les inégalités:

(54) $$\left|\frac{\psi_{2n+1}(\tilde{x}_1) - \psi(\tilde{x}_1)}{\psi_{2n+1}(\tilde{x}_1) - \psi_{2n}(\tilde{x}_1)}\right| < \left|\frac{\psi_{2n}(\tilde{x}_1) - \psi(\tilde{x}_1)}{\psi_{2n+1}(\tilde{x}_1) - \psi_{2n}(\tilde{x}_1)}\right| < 2 \qquad n|1,2,..).$$

(55) $$|\psi_{2n+1}(\tilde{x}_2) - \overline{\psi}(\tilde{x}_2)| < \tfrac{1}{2}\, |\psi_{2n}(\tilde{x}_1) - \psi(\tilde{x}_1)|.$$

---

[11]) Kamke: *D. r. F.*: p. 87, Satz 4.

Soit $\sigma_n(x)$ une intégrale de l'équation (43) pour laquelle on ait:

(56) $$\psi_{2n-1}(x) < \sigma_n(x) < \psi_{2n}(x) \quad \text{pour } x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{b}{4}.$$

Considérons les ensembles:

(ω_n) $$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{b}{4}; \quad \sigma_n(x) \leqslant y \leqslant \psi_{2n+1}(x) \qquad n|1, 2, \ldots$$

En vertu des inégalités (56), les ensembles ω_n sont disjoints.

Posons:

$$\Phi_n(x, y) \overset{\text{df}}{=} \Delta\left(\sin \frac{y - \sigma_n(x)}{\psi_{2n+1}(x) - \sigma_n(x)} \pi \cdot \sin \frac{4(x - x_0)}{b} \pi\right) \quad \text{(cf. l'alinéa V)}$$

et soit ϱ_n une suite de nombres dont nous allons, tout à l'heure, spécifier les propriétés. Définissons la fonction $h(x_0, b; x, y)$ par les formules:

(57) $$h(x_0, b; x, y) \overset{\text{df}}{=} h_1(x_0, b; x, y) + \varrho_n \cdot \Phi_n(x, y) \quad \text{dans } \omega_n \; n|1, 2, \ldots$$
$$h(x_0, b; x, y) \overset{\text{df}}{=} h_1(x_0, b; x, y) \quad \text{pour tout autre point du carré } K(x_0, b).$$

Considérons l'équation:

(58) $$\frac{dy}{dx} = h(x_0, b; x, y).$$

Les ensembles ω_n étant disjoints, il résulte du lemme 5 (l'alinéa V) que la fonction h jouit de la propriété w_1) et que les fonctions $\psi_{2n+1}(x)$ et $\sigma_n(x)$ sont intégrales de l'équation (58). Nous constatons aussi, sans difficulté, que la fonction h possède les propriétés w_2) et w_3).

Quant à la détermination de la suite ϱ_n, nous procédons comme il suit. Désignons par $\varphi_{2n}(x)$ les intégrales de (58) passant par les points $A_{2n}(x_0, y_{2n})$. Soit $\mathfrak{z}_n$ un nombre satisfaisant aux inégalités:

(59) $$\psi_{2n}(\widetilde{x}_2) < \mathfrak{z}_n < \psi_{2n+1}(\widetilde{x}_2).$$

(60) $$|\mathfrak{z}_n - \psi_{2n+1}(\widetilde{x}_2)| < \frac{1}{2^n} |\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \psi_{2n}(\widetilde{x}_1)|.$$

Désignons par $\overline{\chi}_n(x)$ l'intégrale de l'équation (43) pour laquelle on ait:

$$(61) \qquad \overline{\chi}_n(\widetilde{x}_2) = \mathfrak{z}_n.$$

En vertu de (59) nous avons des inégalités:

$$(62) \qquad \psi_{2n}(\widetilde{x}_2) < \overline{\chi}_n(\widetilde{x}_2) < \psi_{2n+1}(\widetilde{x}_2).$$

Il en résulte, en vertu de l'unicité de l'équation (43), qu'on a les inégalités:

$$(63) \qquad \psi_{2n}\left(x_0 + \frac{b}{4}\right) < \overline{\chi}_n\left(x_0 + \frac{b}{4}\right) < \psi_{2n+1}\left(x_0 + \frac{b}{4}\right).$$

Il s'ensuit, d'après les inégalités (56) que:

$$(64) \qquad \sigma_n\left(x_0 + \frac{b}{4}\right) < \overline{\chi}_n\left(x_0 + \frac{b}{4}\right) < \psi_{2n+1}\left(x_0 + \frac{b}{4}\right).$$

Grâce à ces inégalités nous pouvons appliquer le lemme 5 (cf. l'alinéa V) et choisir les nombres ϱ_n, de façon qu'on ait:

$$(65) \qquad \varphi_{2n}\left(x_0 + \frac{b}{4}\right) = \overline{\chi}_n\left(x_0 + \frac{b}{4}\right).$$

La fonction h étant identique avec la fonction h_1 (selon la déf. (57)) pour $x_0 + \frac{b}{4} \leqslant x < x_0 + \frac{3}{4}b$, nous en concluons, en vertu de (65), que:

$$(66) \qquad \varphi_{2n}(x) = \overline{\chi}_n(x) \quad \text{pour } x_0 + \frac{b}{4} \leqslant x < x_0 + \frac{3}{4}b.$$

Nous avons donc, en particulier, d'après (61):

$$(67) \qquad \varphi_{2n}(\widetilde{x}_2) = \mathfrak{z}_n. \qquad n|1,2,...$$

D'autre part, la fonction h étant identique avec h_1, pour: $x_0 - \frac{b}{4} < x \leqslant x_0$, il résulte de l'égalité: $\varphi_{2n}(x_0) = y_{2n} = \psi_{2n}(x_0)$, qu'on a:

$$(68) \qquad \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1) = \psi_{2n}(\widetilde{x}_1) \qquad n|1,2,...$$

Posons:

(69) $$\lambda_n = \frac{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_2) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_2)}{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1)}.$$

En rapprochant les relations (60), (67) et (68) nous obtenons les inégalités:

(70) $$|\lambda_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad n|1, 2, \ldots$$

d'où il résulte que:

(71) $$\lambda_n \to 0$$

En vertu de (54) et (68) nous avons les inégalités:

(72) $$\left|\frac{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \psi(\widetilde{x}_1)}{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1)}\right| < \left|\frac{\varphi_{2n}(\widetilde{x}_1) - \psi(\widetilde{x}_1)}{\psi_{2n+1}(\check{x}_1) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1)}\right| < 2. \quad n|1, 2, \ldots$$

En rapprochant les relations (67) et (68) des inégalités (55) et (60), nous obtenons les inégalités:

(73) $$|\varphi_{2n}(\widetilde{x}_2) - \overline{\psi}(\widetilde{x}_2)| < |\varphi_{2n}(\widetilde{x}_1) - \psi(\widetilde{x}_1)|.$$

En vertu de la relation (68) et des inégalités (59), (72) et (73), nous avons les inégalités:

(74) $$\left|\frac{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_2) - \overline{\psi}(\widetilde{x}_2)}{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1)}\right| < \left|\frac{\varphi_{2n}(\widetilde{x}_2) - \overline{\psi}(\widetilde{x}_2)}{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1)}\right| < 2. \quad n|1, 2, \ldots$$

D'après (68), il résulte de la relation (47) qu'on a:

(75) $$\varphi_{2n}(\widetilde{x}_1) \to \psi(\widetilde{x}_1).$$

En vertu de (53), (59) et (67), nous avons aussi:

(76) $$\varphi_{2n}(\widetilde{x}_2) \to \overline{\psi}(\widetilde{x}_2).$$

4. Nous allons démontrer maintenant que la fonction $h(x_0, b; x, y)$ définie par les formules (57), (jouissant comme nous l'avons constaté des propriétés w_1), w_2) et w_3)), possède la propriété w_4).

Soit en effet, $z(x, y)$ une intégrale quelconque (cf. la déf. 2) de l'équation:

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}h(x_0,b;\,x,y)=0\,. \tag{77}$$

valable dans l'ensemble $K(x_0, b)\cdot Z(x_0, b)$.

La fonction $z(x, y)$ étant alors constante [12]) le long de toute intégrale de l'équation (58), nous avons l'égalité:

$$\begin{aligned} z(\widetilde{x}_1, \psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1)) - z(\widetilde{x}_1, \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1)) = z(\widetilde{x}_2, \psi_{2n+1}(\widetilde{x}_2)) - \\ - z(\widetilde{x}_2, \varphi_{2n}(\widetilde{x}_2)). \end{aligned} \tag{78}$$

Remarquons que, d'après (45) et en vertu de la propriété α_4) (cf. l'alinéa VI, 1) les points: $(\widetilde{x}_1, \psi(\widetilde{x}_1))$ et $(\widetilde{x}_2, \overline{\psi}(\widetilde{x}_2))$ appartiennent à l'ensemble $K(x_0, b)\cdot Z(x_0, b)$. La fonction $z(x, y)$ étant intégrale de (77) dans le sens de la définition 2, l'égalité (78) se laisse donc écrire, pour n suffisamment grand, en forme suivante:

$$\begin{aligned} z_y(\widetilde{x}_1, \psi(\widetilde{x}_1))\,(\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1)) + \varepsilon_1(\widetilde{x}_1, \psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1))\,(\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \\ - \psi(\widetilde{x}_1)) - \varepsilon_1(\widetilde{x}_1, \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1))\,(\varphi_{2n}(\widetilde{x}_1) - \psi(\widetilde{x}_1)) = \\ = z_y(\widetilde{x}_2, \overline{\psi}(\widetilde{x}_2))\,(\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_2) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_2)) + \varepsilon_2(\widetilde{x}_2, \psi_{2n+1}(\widetilde{x}_2))\,(\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_2) - \\ - \overline{\psi}(\widetilde{x}_2)) - \varepsilon_2(\widetilde{x}_2, \varphi_{2n}(\widetilde{x}_2))\,(\varphi_{2n}(\widetilde{x}_2) - \overline{\psi}(\widetilde{x}_2)). \end{aligned} \tag{79}$$

où $\varepsilon_1(x, y)$ et $\varepsilon_2(x, y)$ désignent deux fonctions satisfaisant respectivement aux implications:

$$\begin{aligned} (x, y) \to (\widetilde{x}_1, \psi(\widetilde{x}_1)) \cdot \supset \cdot \varepsilon_1(x, y) \to 0\,; \\ (x, y) \to (\widetilde{x}_2, \overline{\psi}(\widetilde{x}_2)) \cdot \supset \cdot \varepsilon_2(x, y) \to 0\,. \end{aligned} \tag{80}$$

En divisant l'égalité (79) par $\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1)$, nous en obtenons, en vertu de (69), la relation:

$$\begin{aligned} z_y(\widetilde{x}_1, \psi(\widetilde{x}_1)) + \varepsilon_1(\widetilde{x}_1, \psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1))\,\frac{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \psi(\widetilde{x}_1)}{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1)} - \\ - \varepsilon_1(\widetilde{x}_1, \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1))\,\frac{\varphi_{2n}(\widetilde{x}_1) - \psi(\widetilde{x}_1)}{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1)} = \\ = \lambda_n z_y(\widetilde{x}_2, \overline{\psi}(\widetilde{x}_2)) + \varepsilon_2(\widetilde{x}_2, \psi_{2n+1}(\widetilde{x}_2))\,\frac{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_2) - \overline{\psi}(\widetilde{x}_2)}{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1)} - \\ - \varepsilon_2(\widetilde{x}_2, \varphi_{2n}(\widetilde{x}_2))\,\frac{\varphi_{2n}(\widetilde{x}_2) - \overline{\psi}(\widetilde{x}_2)}{\psi_{2n+1}(\widetilde{x}_1) - \varphi_{2n}(\widetilde{x}_1)}\,. \end{aligned} \tag{81}$$

---

[12]) Kamke: *D. r. F.*: p. 298. Satz 1.

En faisant croître n vers l'infini nous obtenons de (81), d'après (47), (53), (71), (72), (74), (75), (76) et (80), l'égalité:

$$z_y(\widetilde{x}_1, \psi(\widetilde{x}_1)) = 0. \tag{82}$$

Il s'ensuit de (82) que le point $(\widetilde{x}_1, \psi(\widetilde{x}_1))$ est horizontal (cf. la déf. 3) par rapport à la fonction $h(x_0, b; x, y)$ et à l'ensemble $K(x_0, b) \cdot Z(x_0, b)$. La fonction $\psi(x)$ étant intégrale de l'équation (58), située (d'après (45)) dans l'ensemble $K(x_0, b) \cdot Z(x_0, b)$, nous en concluons, selon le lemme 2, que tout point de l'intégrale $\psi(x)$ est horizontal par rapport à la fonction h et à l'ensemble $K \cdot Z$.

La fonction $h(x_0, b; x, y)$ possède donc la propriété w_4).

VII. Désignons respectivement par P et par P_u, les demi-plans:

$$(P)\ y < 0; \quad (P_u)\ y < -\frac{1}{u}, \qquad u|1, 2, \ldots$$

Soit $M_1, M_2, \ldots$ une suite de points situés partout dense dans le demi-plan P. Nous allons, maintenant, définir une suite de fonctions $f_u(x, y)$ et deux suites numériques: $x_1, x_2, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots$ $(b_u > 0)$, jouissant des propriétés suivantes:

A_u) $f_u(x, y)$ est de classe C^∞ dans le demi-plan P.

B_u) $f_u(x, y) \equiv 1$ pour $(x, y) \in P - \sum_{i=1}^{u} Z_i$.

(où $Z_i \overset{\text{df}}{=} P \cdot Z(x_i, b_i)$; (cf. l'alinéa VI)).

C_u) $f_u(x, y) \equiv f_{u-1}(x, y)$ pour $(x, y) \in P_u + \sum_{i=1}^{u-1} Z_i$ $\quad (u|2, 3, \ldots)$.

D_u) Toute intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = f_u(x, y). \tag{e_u}$$

différente de celles qui passent par les points: $M_1, M_2', \ldots, M_u$, se laisse prolonger à droite jusqu'à ce qu'elle rencontre le bord supérieur du demi-plan P en un point n'appartenant pas à l'ensemble $\sum_{i=1}^{u} Z_i$ fermé.

E_u) L'intégrale de (e_u) passant par M_u est située entièrement dans $\sum_{i=1}^{u} Z_i$.

F_u) Le point M_u est horizontal par rapport à la fonction $f_u(x, y)$ et à l'ensemble $\sum_{i=1}^{u} Z_i$.

Posons, à cet effet: $\lambda_{M_1}(x) \overset{df}{=} m_1 + x - n_1$, où (m_1, n_1) désignent les coordonnées du point M_1, et considérons la droite $y = \lambda_{M_1}(x)$. Supposons qu'elle coupe le bord supérieur du demi-plan P en un point dont l'abcisse soit x_1. Soit b_1 un nombre fixe pour lequel on ait: $0 < b_1 < 1$.

Nous définirons la fonction $f_1(x, y)$ par les formules:

$$f_1(x, y) \overset{df}{=} h(x_1, b_1; x, y) \quad \text{pour } (x, y) \in K(x_1, b_1) \qquad \text{(cf. l'alinéa VI)}$$

$$f_1(x, y) \overset{df}{=} 1 \qquad \text{,,} \quad (x, y) \in P - K(x_1, b_1).$$

Nous constatons, sans difficulté, que la fonction $f_1(x, y)$ ainsi définie jouit des propriétés A_1, B_1, D_1.

La fonction $\lambda_{M_1}(x)$ est évidemment intégrale de l'équation (e_1).

Or, en vertu de l'alinéa VI, il résulte que les points de l'intégrale $\lambda_{M_1}(x)$ qui sont situés dans l'ensemble $Z_1 \cdot K(x_1, b_1)$, sont horizontaux par rapport à la fonction f_1 et à cet ensemble. Les points en question sont, à plus forte raison, horizontaux par rapport à f_1 et à l'ensemble Z_1 (cf. le lemme 1, l'alinéa I). Nous en concluons, en vertu du lemme 2 (cf. l'alinéa II), que l'intégrale $\lambda_{M_1}(x)$, (étant évidemment située dans l'ensemble Z_1) ne contient que des points horizontaux par rapport à f_1 à Z_1. Le point M_1, en particulier, est donc horizontal par rapport à f_1 et à Z_1. Les conditions: $A_1, \ldots, F_1$, se trouvent ainsi réalisées. Supposons que nous ayons défini les fonctions f_u et le nombres x_u et b_u jouissant des propriétés $A_u, \ldots, E_u$, pour tout indice $u \leqslant u_0$.

Soit $\lambda_{Mu_0+1}(x)$ l'intégrale de l'équation e_{u_0} passant par le point M_{u_0+1}. Si l'intégrale envisagée passe par un des points $M_1, \ldots, M_{u_0}$, posons alors:

$$f_{u_0+1}(x) \overset{df}{=} f_{u_0}(x)\,; \quad x_{u_0+1} \overset{df}{=} x_{u_0}\,; \quad b_{u_0+1} \overset{df}{=} b_{u_0}.$$

Nous constatons que les conditions: $A_{u_0+1}, \ldots, F_{u_0+1}$ sont alors remplies. Dans le cas contraire désignons par x_{u_0+1}, l'abcisse du point en lequel l'intégrale en question rencontre le bord supérieur du demi-plan P.

Choisissons un voisinage 0_{u_0+1} du point $(x_{u_0+1}, 0)$ de façon qu'on ait, dans l'ensemble $P. \ 0_{u_0+1}$, l'identité $f_{u_0}(x, y) \equiv 1$. (En vertu de la propriété B_{u_0}, cela est possible, le point $(x_{u_0+1}, 0)$ étant situé, selon notre hypothèse, hors de l'ensemble $\sum_{i=1}^{u_0} Z_i$ fermé). Soit b_{u_0+1} un nombre fixe remplissant l'inégalité $0 < b_{u_0+1} < \frac{1}{u_0+1}$ et suffisamment petit pour que le carré $K(x_{u_0+1}, b_{u_0+1})$ soit contenu dans l'ensemble $P. \ 0_{u_0+1}$ et n'ait pas de points communs avec l'ensemble $\sum_{i=1}^{u_0} Z_i$ fermé. Posons:

$$f_{u_0+1}(x, y) \overset{\text{df}}{=} h(x_{u_0+1}, b_{u_0+1}; x, y) \qquad \text{pour} \quad (x, y) \in K(x_{u_0+1}, b_{u_0+1})$$

(cf. l'alinéa VI).

$$f_{u_0+1}(x, y) \overset{\text{df}}{=} f_{u_0}(x, y) \qquad \text{pour} \quad (x, y) \in P - K(x_{u_0+1}, b_{u_0+1}).$$

On constate, sans difficulté, que la fonction f_{u_0+1} ainsi définie jouit des propriétés $A_{u_0+1}, B_{u_0+1}, C_{u_0+1}$ et D_{u_0+1}.

Nous démontrerons, à présent, que la condition E_{u_0+1} est aussi remplie pour la fonction f_{u_0+1}. La fonction $\lambda_{Mu_0+1}(x)$ étant (comme on le voit aisément) intégrale de l'équation (e_{u_0+1}), passant par le point M_{u_0+1}, nous avons donc à démontrer que la courbe: $y = \lambda_{Mu_0+1}(x)$, est située entièrement dans l'ensemble $\sum_{i=1}^{u_0+1} Z_i$.

Supposons, à cet effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Il existerait alors un certain $\overline{x}$ tel que le point $(\overline{x}, \lambda_{Mu_0+1}(\overline{x}))$ serait situé à l'extérieur de l'enseble $\sum_{i=1}^{u_0+1} Z_i$. En vertu de la propriété B_{u_0+1}, nous aurions alors: $\lambda_{Mu_0+1}(x) = \lambda_{Mu_0+1}(\overline{x}) + (x - \overline{x})$ pour $x \geqslant \overline{x}$. L'intégrale $\lambda_{Mu_0+1}(x)$ serait donc située, pour $x \geqslant \overline{x}$, à l'extérieur de l'ensemble $\sum_{i=1}^{u_0+1} Z_i$, ce qui est en contradiction avec le fait que, pour x voisins de x_{u_0+1}, elle se trouve dans l'ensemble Z_{u_0+1}.

Il résulte ensuite, de l'alinéa VI, que les points de l'intégrale $\lambda_{Mu_0+1}(x)$ situés dans l'ensemble $Z_{u_0+1}\cdot K(x_{u_0+1}, b_{u_0+1})$ sont horizontaux par rapport à la fonction f_{u_0+1} et à cet ensemble. En vertu du lemme 1 (cf. l'alinéa I) les points en question sont donc horizontaux par rapport à f_{u_0+1} et à $\sum_{i=1}^{u_0+1} Z_i$. Puisque l'intégrale λ_{Mu_0+1} est située (comme nous venons de le constater) dans l'ensemble $\sum_{i=1}^{u_0+1} Z_i$, nous en concluons, en vertu du lemme 2 (cf. l'alinéa II), que tout point de l'intégrale envisagée est horizontal par rapport à la fonction f_{u_0+1} et à l'ensemble $\sum_{i=1}^{u_0+1} Z_i$. Le point M_{u_0+1}, en particulier, l'est aussi. Toutes les conditions: $A_{u_0+1}, \ldots, F_{u_0+1}$, ont donc lieu.

Les suites: f_u, x_u et b_u se trouvent ainsi définies par récurrence.

VIII. Soit (x,y) un point quelconque du demi-plan P. Désignons par $m(x,y)$, le minimum des indices u, pour lesquels: $(x,y)\in P_u$. Posons, ensuite:

$$Q_1(x,y) \overset{\text{dt}}{=} f_{m(x,y)}(x,y) \quad \text{dans le demi-plan } P. \tag{83}$$

En vertu des propriétés A_u et C_u la fonction $Q_1(x,y)$ est de classe C^∞ dans le demi-plan P.

Il résulte de la déf. (83) et des propriétés $C_{u+1}, C_{u+2}, \ldots$ qu'on a:

$$Q_1(x,y) = f_u(x,y) \quad \text{pour } (x,y)\in \sum_{i=1}^{u} Z_i \qquad u|1,2,\ldots \tag{84}$$

En vertu de la propriété F_u et du lemme 1 (cf. l'alinéa I), nous concluons, d'après (4), que le point M_u est horizontal par rapport à la fonction $Q_1(x,y)$ et à demi-plan P. $(u|1,2,\ldots)$.

Pour toute intégrale (cf. la déf. 2, l'alinéa I) $z_1(x,y)$ de l'équation:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} Q_1(x,y) = 0 \tag{85}$$

valable dans le demi-plan P tout entier, les égalités:

(86) $$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial z_1}{\partial y} = 0$$

sont donc remplies en tous les points M_u, $u|1, 2, \ldots$

IX. Introduisons la transformation:

(87) $$\bar{x} = x\,; \quad \bar{y} = -e^y.$$

On constate, sans difficulté, que les formules (87) présentent une transformation du plan tout entier en demi-plan P.

Posons:

$$Q(x, y) \overset{\mathrm{df}}{=} -Q_1(x, -e^y)e^{-y} \quad \text{dans le plan tout entier}$$

et considérons l'équation:

(88) $$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} Q(x, y) = 0.$$

Supposons que les points M'_u se transforment par l'intermédiaire des formules (87) en points M_u. Les points M_u étant situés partout dense dans le demi-plan P, les points M'_u le sont aussi dans le plan tout entier. La transformation (87) satisfaisant aux hypothèses du lemme 3 (cf. l'alinéa III), nous concluons que pour toute intégrale $z(x, y)$ de (88) valable dans le plan, il existe une intégrale $z_1(x, y)$ de (85), telle qu'on ait:

(89) $$z(x, y) \equiv z_1(x, -e^y) \quad \text{dans le plan tout entier.}$$

En vertu des égalités (86) et de la formule pour les dérivées de la fonction composée, il résulte de l'identité (89) que les égalités:

(90) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ont lieu en tout point M'_u.

La fonction $Q(x, y)$ étant évidemment de classe C^∞, nous avons donc le

Théorème 1 a. Il existe une fonction $Q(x, y)$ de classe C^∞ dans le plan tout entier telle que, pour toute intégrale $z(x, y)$ (cf. la déf. 2) de l'équation (88), définie dans le plan tout entier, les égalités (90) ont lieu dans un ensemble partout dense dans le plan.

X. Considérons la transformation:

$$(91)\qquad \begin{aligned} \bar{x} &= \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}(x+a)\right) \\ \bar{y} &= \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}(y+a)\right) \end{aligned} \qquad (a \text{ un nombre fini, positif}).$$

Les formules (91) présentent une transformation du carré:

$$(92)\qquad |x|<a; \quad |y|<a.$$

en plan tout entier. Posons:

$$\bar{Q}(x,y) \overset{\mathrm{df}}{=} Q\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}(x+a)\right); \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}(y+a)\right)\right) \frac{\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}(y+a)\right)}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}(x+a)\right)}$$

et considérons l'équation:

$$(93)\qquad \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\bar{Q}(x,y)=0.$$

La transformation (91) satisfaisant aux hypothèses du lemme 3, et la fonction $\bar{Q}(x,y)$ étant évidemment de classe C^∞ dans le carré (92) nous obtenons du théorème 1 a, par un raisonnement analogue à celui que nous venons d'appliquer dans l'alinéa IX, le

Théorème 2 a. Il existe une fonction $\bar{Q}(x,y)$ de classe C^∞ dans le carré (92) telle que, pour toute intégrale $z(x,y)$ de l'équation (93), définie dans le carré (92), les égalités (90) ont lieu dans un ensemble partout dense dans le carré envisagé.

XI. Supposons, maintenant, que $z(x,y)$ soit une intégrale de l'équation (88) possédant des dérivées partielles continues du 1-er ordre dans le plan tout entier. En vertu de l'alinéa IX et en raison de la continuité, les égalités (90) sont alors remplies identiquement dans le plan tout entier. L'intégrale $z(x,y)$ est donc constante. La fonction $Q(x,y)$ rentre donc dans la catégorie de celles dont l'existence affirme notre théorème principal 1.

Nous démontrons d'une façon analogue, en vertu du théorème 2 a, que la fonction $\bar{Q}(x,y)$ rentre dans la catégorie de celles dont l'existence affirme notre théorème 2.

SUR LES SUITES MONOTONES EN MOYENNE

Par F. Leja, Kraków

1. Je dirai qu'une suite $\{a_n\}$ est *décroissante en moyenne*: 1° au sens arithmétique si

$$(1) \qquad a_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

2° au sens géométrique si $a_n > 0$ et

$$(2) \qquad a_{n+2} \leqslant \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

3° au sens harmonique si $a_n > 0$ et

$$(3) \qquad a_{n+2} \leqslant \frac{2}{1/a_n + 1/a_{n+1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

La définition de la *croissance en moyenne* est analogue. Il est facile de voir qu'une suite décroissante (croissante) en moyenne est bornée supérieurement (inférieurement). Je dis que:

Toute suite monotone en moyenne tend vers une limite finie ou infinie.

En effet, considérons, par exemple, le cas (1), posons

$$(4) \qquad \alpha = \liminf a_n \leqslant \limsup a_n = \beta$$

et supposons que α soit fini. À chaque $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre deux indices N et $m \geqslant N$ tels qu'on ait

$$a_{m+1} < \alpha + \varepsilon \quad \text{et} \quad a_n < \beta + \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqslant N,$$

donc $a_m < \beta + \varepsilon$ et $a_{m+1} < \beta + \varepsilon - d$ où $d = \beta - \alpha$. Il en résulte d'après (1) que

$$a_{m+2} < \beta + \varepsilon - \frac{1}{2} d.$$

Si le nombre $d=\beta-\alpha$ était positif on pourrait poser $\varepsilon=d/4$ donc

$$a_{m+1}<\beta-\frac{3}{4}d<\beta-\frac{1}{4}d, \quad a_{m+2}<\beta-\frac{1}{4}d$$

et, en appliquant (1), on en déduirait

$$a_{m+k}<\beta-\frac{1}{4}d \qquad \text{pour } k=1,2,\ldots$$

ce qui entraîne l'inégalité absurde

$$\limsup_{k\to\infty} a_{m+k}=\beta\leqslant\beta-\frac{1}{4}d,$$

donc $\alpha=\beta$ et la suite $\{a_n\}$ est convergente.

Dans le cas $\alpha=-\infty$ le raisonnement analogue prouve que $\beta=-\infty$.

2. La notion de monotonie en moyenne peut être généralisée dans deux directions:

Une suite $\{a_n\}$ sera dite *décroissante en moyenne par rapport à p termes précédents* (au sens arithmétique) si, quel que soit $n=1,2,\ldots$, on a

$$(5) \qquad a_{n+p}\leqslant\frac{1}{p}(a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+p-1}).$$

D'autre part, elle sera dite décroissante en moyenne *avec le poids θ*, où $0<\theta<1$, si

$$(6) \qquad a_{n+2}\leqslant\theta a_n+(1-\theta)a_{n+1}, \qquad n=1,2,\ldots$$

Je dis que:

Toute suite monotone en moyenne au sens (5) *ou* (6) *tend vers une limite finie au infinie.*

En effet, supposons que la condition (5) soit remplie et désignons par α et β les limites (4). Posons $d=\beta-\alpha$ et faisons correspondre à $\varepsilon>0$ deux indices N et $m\geqslant N$ tels qu'on ait

$$a_{m+p}<\alpha+\varepsilon \quad \text{et} \quad a_n<\beta+\varepsilon \qquad \text{pour } n\geqslant N.$$

En tenant compte de (5) on en déduit

$$a_{m+p+1} < \beta + \varepsilon - \frac{1}{p} d, \quad a_{m+p+2} < \beta + \varepsilon - \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p}\right) d$$

et

$$a_{m+p+k} < \beta + \varepsilon - \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{k-1} d \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, p-1$$

d'où il résulte que

$$(7) \qquad a_{m+p+k} < \beta + \varepsilon - \frac{1}{p} d \qquad \text{pour } k = 0, 1, \ldots.$$

Si la différence $\beta - \alpha = d$ était positive on pourrait poser $\varepsilon = \frac{1}{2p} d$ et, en faisant tendre k vers l'infini, on déduirait de (7) l'inégalité absurde $\beta \leqslant \beta - \frac{1}{2p} d$, ce qui prouve que la limite $\lim a_n$ existe.

Dans le cas de l'hypothèse (6) la démonstration est analogue.

Nous avons supposé que dans l'hypothèse (5), le nombre p est fixe. Dans le cas contraire le théorème cesse d'être vrai. Une suite décroissante en moyenne par rapport à tous les termes précédents, c'est-à-dire remplissant la condition

$$(8) \qquad a_{n+1} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

peut être divergente. Voici l'exemple d'une telle suite:

Posons

$$(9) \qquad n_0 = 1, \quad n_k = 2 + k \cdot 2^k \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots,$$

et $\sigma_n = \frac{1}{2^{k-1}}$ pour $n_{k-1} \leqslant n < n_k$, $k = 1, 2, \ldots$ La suite $\{a_n\}$, où

$$(10) \qquad a_{n+1} = (n+1)\sigma_{n+1} - n\sigma_n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

remplit la condition (8) car d'après (10) on a

$$a_1 + \ldots + a_n = \sigma_1 + (2\sigma_2 - \sigma_1) + \ldots + (n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1})$$
$$= n\sigma_n$$

et

$$a_{n+1} = (n+1)(\sigma_{n+1} - \sigma_n) + \sigma_n \leqslant \sigma_n.$$

Mais, d'après (9) et (10)

$$a_{n_k} = (n_k - 1)(\sigma_{n_k} - \sigma_{n_{k-1}}) + \sigma_{n_k} = (n_k - 1)\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}}\right) + \frac{1}{2^k} =$$

$$= -\frac{n_k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = -\frac{n_k - 2}{2^k} = -k$$

et

$$a_{n_k+1} = n_k(\sigma_{n_k+1} - \sigma_{n_k}) + \sigma_{n_k+1} = n_k\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k},$$

donc la suite $\{a_n\}$ diverge car $a_{n_k} \to -\infty$ et $a_{n_k+1} \to 0$.

3. Voici une autre sorte de monotonie en moyenne:

Je dirai qu'une suite $\{a_n\}$ est *décroissante en moyenne par rapport à la somme des indices* (au sens arithmétique) si

$$(11) \qquad a_{\mu+\nu} \leqslant \frac{1}{2}(a_\mu + a_\nu), \quad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots.$$

Il est évident qu'une suite décroissante (croissante) en moyenne par rapport à la somme des indices est bornée supérieurement (inférieurement). Je dis que:

Toute suite monotone en moyenne par rapport à la somme des indices tend vers une limite finie ou infinie.

En effet, supposons que, p. e., la condition (11) soit remplie et posons $\alpha = \liminf a_n \leqslant \limsup a_n = \beta$. Si α est fini et $\varepsilon > 0$ quelconque on peut trouver un terme, soit a_m, de la suite $\{a_n\}$ tel qu'on ait

$$a_m < \alpha + \varepsilon.$$

Posons $n = mk + r$, où $1 \leqslant r \leqslant m$. D'après (11) on a $a_{m+r} \leqslant \frac{1}{2}(a_m + a_r)$ donc

$$a_{2m+r} \leqslant \frac{1}{2}(a_{m+r} + a_m) \leqslant \frac{2^2-1}{2^2} a_m + \frac{1}{2^2} a_r,$$

$$a_{3m+r} \leqslant \frac{1}{2}(a_{2m+r} + a_m) \leqslant \frac{2^3-1}{2^3} a_m + \frac{1}{2^3} a_r,$$

. . . .

$$a_{km+r} \leqslant \frac{2^k-1}{2^k} a_m + \frac{1}{2^k} a_r.$$

Il en résulte que

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \beta \leqslant a_m < \alpha + \varepsilon,$$

donc $\alpha = \beta$, ce qui prouve que a_n tend vers une limite finie.

Dans le cas $\alpha = -\infty$ le raisonnement analogue prouve que $\beta = -\infty$.

Ce théorème peut être généralisé dans deux directions. Remplaçons d'abord la condition (11) par la suivante

$$a_{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_p} \leqslant \frac{1}{p}(a_{\mu_1} + a_{\mu_2} + \ldots + a_{\mu_p}), \tag{12}$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ est un système de p nombres entiers positifs quelconques et p est un nombre fixe $\geqslant 2$. Si la condition (12) est remplie quels que soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, je dirai que la suite $\{a_n\}$ est *décroissante en moyenne* (au sens arithmétique) *par rapport à la somme de p indices.*

D'autre part, observons que la condition (11) est un cas particulier de la suivante

$$a_{\mu+\nu} \leqslant \theta a_\mu + (1-\theta) a_\nu, \qquad \mu \geqslant \nu = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

où θ est une constante satisfaisant à l'inégalité $0 < \theta < 1$. On peut prouver que:

Toute suite monotone en moyenne au sens de la condition (12) *ou* (13) *tend vers une limite finie ou infinie.*

4. Remplaçons la condition (13) par la suivante:

$$a_{\mu+\nu} \leqslant \theta^{\mu}_{\mu+\nu} a_\mu + \theta^{\nu}_{\mu+\nu} a_\nu, \qquad \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

où $\theta^{\mu}_{\mu+\nu}$ et $\theta^{\nu}_{\mu+\nu}$ sont des nombres positifs quelconques satisfaisant à l'équation $\theta^{\mu}_{\mu+\nu} + \theta^{\mu}_{\mu+\nu} = 1$. Je dis que:

Toute suite monotone en moyenne au sens de la condition (14) *tend vers une limite pourvu que le produit*

$$\theta^{\nu}_{\mu+\nu}\, \theta^{\mu+\nu}_{2\mu+\nu} \ldots \theta^{(k-1)\mu+\nu}_{k\mu+\nu} \tag{15}$$

tende vers zéro quels que soient μ et ν lorsque $k \to \infty$.

En effet, posons $\alpha = \liminf a_n \leqslant \limsup a_n = \beta$ et soit a_m un terme de la suite plus petit que $\alpha + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, et

$$n = km + r, \qquad \text{où } 1 \leqslant r \leqslant m.$$

Désignons par θ_k le produit

$$(16) \qquad \theta_k = \theta^r_{m+r} \cdot \theta^{m+r}_{2m+r} \cdots \theta^{(k-1)m+r}_{km+r}, \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots$$

D'après (14) et (16) on a

$$a_{m+r} \leqslant (1 - \theta^r_{m+r})\, a_m + \theta^r_{m+r}\, a_r = (1 - \theta_1)\, a_m + \theta_1\, a_r,$$

$$a_{2m+r} \leqslant \theta^{m+r}_{2m+r}\, a_{m+r} + (1 - \theta^{m+r}_{2m+r})\, a_m \leqslant (1 - \theta_2)\, a_m + \theta_2\, a_r,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{km+r} \leqslant (1 - \theta_k)\, a_m + \theta_k\, a_r.$$

Faisons tendre k vers l'infinie. Puisque $\theta_k \to 0$ il s'ensuit que

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \limsup_{k \to \infty} a_{km+r} \leqslant a_m < \alpha + \varepsilon,$$

donc $\beta < \alpha + \varepsilon$ quel petit que soit $\varepsilon > 0$ et par suite $\alpha = \beta$ ce qui prouve que la limite $\lim a_n$ existe.

De cette proposition résulte le théorème connu suivant de MM. Polya-Szegö: *Si une suite* $\{\alpha_n\}$ *remplit la condition* $\alpha_{\mu+\nu} \leqslant \alpha_\mu + \alpha_\nu$ *pour* μ *et* $\nu = 1, 2, \ldots$, *alors la suite* $\left\{\frac{\alpha_n}{n}\right\}$ *tend vers une limite.* — Il suffit de remarquer que, si l'on pose $a_n = \alpha_n / n$, la suite $\{a_n\}$ remplit la condition (14), où $\theta^{\mu}_{\mu+\nu} = \frac{\mu}{\mu+\nu}$, donc le produit (15) est égale à $\frac{\nu}{k\mu+\nu}$ et tend avec $1/k$ vers zéro.

5. Soient p et q deux nombres entiers positifs quelconques fixes et $\{a_n\}$ une suite remplissant ou bien la condition

$$(17) \qquad \frac{1}{p}(a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots a_{n+p}) \leqslant \frac{1}{q}(a_{n+p+1} + \ldots + a_{n+p+q})$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ ou bien la condition

$$(18) \qquad \frac{1}{p}(a_{\mu_1} + a_{\mu_2} + \ldots + a_{\mu_p}) \leqslant \frac{1}{q}(a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \ldots + a_{\nu_q}),$$

où les indices $\mu_1, \ldots, \mu_p$ et $\nu_1, \ldots, \nu_q$ sont quelconques mais tels qu'on ait

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_p = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_q .$$

Il s'élève le problème de savoir si une telle suite tend vers une limite? Nous avons vu plus haut que la réponse est affirmative dans le cas où l'un des nombres p et q est égal à 1 et l'autre >1.

LINEAR OPERATIONS AMONG BOUNDED MEASURABLE FUNCTIONS I

By A. Alexiewicz, Poznań

This paper is concerned with the study of linear operations defined in the space M of measurable, essentially bounded functions. Besides the ordinary convergence generated by norm in which M is a (B)[1] space we consider also an other convergence, introduced by Fichtenholz (1,2) in which M is not more of Banach type. In connection with this convergence we consider a generalized notion of convergence in (F) spaces.

Corresponding to the two kinds of convergence in M, we obtain two classes of linear operations in this space. We give analytical representation of these operations in terms of Fréchet-Radon integrals. Linear operations continuous in sense of generalized convergence are not of Banach type, we can show, however, that some theorems concerning sequences of linear operations in Banach spaces remain true for these operations.

Linear operations in M were investigated first by Hildebrandt (1) and, some years later, by Fichtenholz and Kantorovich (1). The generalized convergence and linear operations connected with this convergence were studied by Fichtenholz (1,2), his results were generalized by Orlicz (1).

1. Let S be an abstract set, $\mathfrak{E}$ a Borel family of subsets of S, $\mu(E)$ an absolute additive measure function defined for sets $(\mathfrak{E})$[2] and suppose $\mu(S) < +\infty$.

---

[1]) Concerning the terminology used here see Banach (1). Numbers in brackets refer to the bibliography at the end of this paper.

[2]) The sets of class $\mathfrak{E}$ will be said to be *sets* $(\mathfrak{E})$.

A measure μ is said to be *non singular* if, for every $\varepsilon > 0$, the set S may be represented as a sum of finite number of disjoint sets of measure less than ε.

By M we denote the linear set of all real functions $x(t)$ defined in S, measurable ($\mathfrak{E}$) and bounded almost everywhere (i. e. excepted a set of measure 0). If we define the norm of $x = x(t)$ by formula

$$\|x\| = \underset{t \in S}{\text{es sup}} |x(t)| \text{ [3]},$$

we can verify easily that M is a (B) space.

By $C_E = C_E(t)$ we shall denote the characteristic function of the set E.

Let Y be a (F) space. A function $\Phi(E)$ defined for all sets ($\mathfrak{E}$) with values in Y will be called additive if: (i) $\Phi(E) = 0$ for all sets of measure 0, (ii) $\Phi(E_1 + E_2) = \Phi(E_1) + \Phi(E_2)$ for any two disjoint sets E_1, E_2.

An additive function $\Phi(E)$ will be said to have the property (v) if for every $\varepsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ such that

$$\|\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu \Phi(E_\nu)\| < \varepsilon$$

for arbitrary real numbers $|a_\nu| < \delta$ and disjoint sets $E_1, E_2, \dots E_m$. An additive function will be said to have the property (a) if $\mu(E_n) \to 0$ implies $\Phi(E_n) \to 0$ (in Y).

(1.1) *Let Y be a (B_0) space*[4]) *then the necessary and sufficient condition that the additive function $\Phi(E)$ should have property (v) is that the set of values taken by this function should be bounded*[5]).

Proof. The necessity being trivial, we show only that the condition is sufficient. We have for every $E \epsilon \mathfrak{E}$: $[\Phi(E)]_\nu \leqslant k_\nu < +\infty$.

---

[3]) $\underset{t \in S}{\text{es sup}} |x(t)|$ denotes the least upper bound of numbers A for which $\mu(\underset{t}{E}\{|x(t)| \geqslant A\}) = 0$.

[4]) The theory of (B_0) spaces (non published) is due to Mazur and Orlicz. Concerning the definition of these spaces see Eidelheit (1). In this paper we shall denote the i-th pseudonorm by $[y]_i$.

[5]) A set $Z \subset Y$ ist said to be *bounded* if (for real ϑ_n) $\vartheta_n \to 0$ implies $\vartheta_n z_n \to 0$ for arbitrary $z_n \epsilon Z$. This definition is due to Banach, see Mazur and Orlicz (1).

From identily $\sup_{0\leqslant\vartheta_i\leqslant 1} [\sum_{i=1}^{m}\vartheta_i y_i]_\nu = \max_{\varepsilon_\nu=0,1} [\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i y_i]_\nu$ (valid in any homogeneously pseudonormed space), we infer that $[\sum_{i=1}^{m} a_i\Phi(E_i)]_\nu \leqslant$ $\leqslant 2 \max_{i=1,\dots m} |a_i| \max_{\varepsilon_i=0,1} [\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\Phi(E_i)] \leqslant 2 \max_{i=1,\dots m} |a_i|\cdot k_\nu$. Hence $\|\sum_{i=1}^{m} a_i\Phi(E_i)\| \leqslant$ $\leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} 2 \max_{i=1,\dots m} |a_i|\cdot k_\nu (1+2\max_{i=1,\dots m}|a_i| k_\nu)^{-1}$ the last sum tends to 0 if $\max_{i=1,\dots m} |a_i| \to 0$.

If Y is a (B) space the boundedness of the set of values of function $\Phi(E)$ is equivalent with the condition $\sup_{E\in\mathfrak{E}} \|\Phi(E)\| < +\infty$.

From (1.1) it follows that if Y is a (B_0) space and μ is not singular, property (a) implies property (v).

If $\Phi(E)$ is an additive function having property (v), we shall denote by $\omega(\delta)=\omega(\delta,\Phi)$ the least upper bound of $\|\sum_{i=1}^{m} a_i\Phi(E_i)\|$ where $|a_i|<\delta$ and E_i are disjoint sets $(\mathfrak{E})$. Similarly if $\Phi(E)$ has property (a) we shall denote by $\eta(\delta)=\eta(\delta,\Phi)=$ $=\sup_{\mu(E)<\delta} \|\Phi(E)\|$. Functions $\omega(\delta)$ and $\eta(\delta)$ are both non decreasing and tend to 0 with δ.

Suppose $\Phi(E)$ is an additive function with property (v). Let $x(t)$ be an element of M. We can define now the Fréchet-Radon integral

$$(1.2) \qquad \int_S x(t)\, d\Phi,$$

the value of integral being an element of Y. This is done as follows: we denote by simple function a measurable function assuming only a finite number of different values $a_1, a_2, \dots a_m$ respectively in sets $E_1, E_2, \dots E_m$; this function will be denoted by $x(t)=\{a_i, E_i\}_{i=1,\dots m}$.

For a simple function $x(t)=\{a_i, E_i\}_{i=1,\dots m}$ the integral is defined by formula $\int_S x(t)\,d\Phi = \sum_{i=1}^{m} a_i\Phi(E_i)$. If $x(t)$ is not a simple function then it can be shown that for a sequence $x_n(t)$ of simple functions converging to $x(t)$ in norm (i. e. uniformly excepted a set of measure 0) the integrals $\int_S x_n(t)\,d\Phi$ approoach (in Y) a limit y_0

which is independent of the particular sequence $x_n(t)$. This limit is called the Fréchet-Radon integral of $x(t)$ and written in the form (1.2). The integral over any measurable set $E \in \mathfrak{E}$ is then defined by formula $\int\limits_E x(t)\,d\Phi = \int\limits_E C_E(t)\,x(t)\,d\Phi$.

This integral is an additive and homogeneous function of integrand and is also an additive function of set E. It is clear that

$$(1.3) \qquad \Big\| \int\limits_E x(t)\, d\Phi \Big\| \leqslant \omega(\|x\|).$$

Suppose now in Y is defined a second norm $\|y\|^*$ which renders this space of (F^*) type [6], and let $\|y\|^* \leqslant \|y\|$. If the additive function $\Phi(E)$ has property (a) "with norm $\|y\|^*$" i. e. if $\mu(E_n) \to 0$ implies $\|\Phi(E_n)\|^* \to 0$, we shall say that $\Phi(E)$ has the property (a^*). In this case we shall denote by $\eta^*(\delta) = \sup\limits_{\mu(E) \leqslant \delta} \|\Phi(E)\|^*$.

By a theorem of EIDELHEIT-MAZUR (1), we can assume that $\|a_1 y\|^* \leqslant \|a_2 y\|^*$ if $0 < a_1 < a_2$, from this it follows that $\|ay\|^* \leqslant (1 + |a|)\|y\|^*$. This assumption will be made in the sequel.

(1.4) *Let $\varepsilon > 0$ be arbitrary, and let $x(t) \in M$. If $\Phi(E)$ has property (v) and (a^*), then*

$$\Big\| \int\limits_E x(t)\, d\Phi \Big\|^* \leqslant \omega(\varepsilon) + 2(\|x\| + 1)([\|x\|\varepsilon^{-1}] + 1)\,\eta^*(\mu(E)).$$

Proof. Write $k = [\|x\|\varepsilon^{-1}] + 1$, $E_n = \underset{t}{E}\left\{\frac{n}{k}\|x\| \leqslant x(t) < \frac{n+1}{k}\|x\|, t \in E\right\}$, $a_n = \frac{n}{k}\|x\|$ for $-k \leqslant n \leqslant k-1$, write also $x_1 = x_1(t) = \{a_n, E_n\}_{-k \leqslant n \leqslant k-1}$.

It is obvious that $\|x_1 - x\| \leqslant \frac{1}{k}\|x\| < \varepsilon$, then $\|\int\limits_E x_1(t) - x(t)\, d\Phi\| \leqslant \omega(\varepsilon)$.

We get then $\|\int\limits_E x_1(t)\, d\Phi\|^* = \|\sum\limits_{n=-k}^{k-1} a_n \Phi(E_n)\|^* \leqslant \sum\limits_{n=-k}^{k-1} (|a_n| + 1)\|\Phi(E_n)\|^* \leqslant$
$\leqslant (\|x\| + 1) \cdot 2k \max\limits_{-k \leqslant n \leqslant k-1} \|\Phi(E_n)\|^* \leqslant (\|x\| + 1)([\|x\|\varepsilon^{-1}] + 1)\,\eta^*(\mu(E))$.

The inequality in (1.4) remains evidently true if we replace in the right-hand side the number $\|x\|$ by any greater one.

---

[6]) A space satisfying the usual postulates of a (F) space excepted this of completeness, is said to be of type (F^*).

Theorem 1. *Suppose that the additive function $\Phi(E)$ has properties* (v) *and* (a^*), *suppose further that* $x_n(t) \in M$, $\|x_n\| < K (n = 1, 2, \ldots)$, *and that* $\lim_{n\to\infty} \text{as}\, x_n(t) = 0$. *Then*

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \int_S x_n(t)\, d\Phi \Big\|^* = 0.$$

Proof. Choose $\varepsilon > 0$ and write $E_n = \underset{t}{E}\{|x_n(t)| \geqslant \varepsilon\}$, we see that $\mu(E_n) \to 0$ and, since $|x_n(t)| < \varepsilon$ for $t \in S - E_n$, $\|\int_{S-E_n} x_n(t)\, d\Phi\| \leqslant \leqslant \omega(\varepsilon)$. By (1.4) we have then $\|\int_S x_n(t)\, d\Phi\|^* \leqslant \|\int_{S-E_n}\|^* + \|\int_{E_n}\|^* \leqslant \leqslant \|\int_{S-E_n}\|^* + \omega(\varepsilon) + 2(K+1)(1 + K\varepsilon^{-1})\,\eta^*(\mu(E_n)) \leqslant 2\{\omega(\varepsilon) + + (K+1)\cdot(1 + K\varepsilon^{-1})\,\eta^*(\mu(E_n))\}$.

Since $\mu(E_n) \to 0$, the second term in the right hand side in the last inequality tends to 0 when $n \to \infty$. Choosing $\varepsilon > 0$ sufficiently small, and then making n tend to ∞, we see that the integral tends to 0.

2. Besides the ordinary convergence generated by norm in M, we shall consider also a generalized convergence due to FICHTENHOLZ (1, 2). It is the following:

(γ) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *means that* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n\| < +\infty$ *and* $\lim_{n\to\infty} \text{as}\, x_n(t) = x_0(t)$.

The convergence (γ) is more general than the ordinary i. e. every sequence convergent in norm is also (γ) convergent but not conversely. We shall denote by M_γ the space M considered as a limit space (in sense of Fréchet) with the convergence (γ). By M we shall denote in the sequel the space M considered as a Banach space with the convergence in norm.

The convergence (γ) is a special case of a generalized notion of limit in (F) spaces which is defined as follows: let Y and Y^* be two (F) spaces respectively with norms $\|y\|$ and $\|y\|^*$, and suppose that Y is a linear subset of Y^*, suppose further that

(n) $\qquad \|y_n\| \to 0$ *implies* $\|y_n\|^* \to 0$.

We shall tell that a sequence $\{y_n\}$ of elements of Y is (γ) *convergent to* y_0 (in symbols (γ) $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ or $y_n \xrightarrow{\gamma} y_0$) if it is

bounded in Y and $\|y_n - y_0\|^* \to 0$. The convergence (γ) will be called *two-norms convergence* or briefly (n) *convergence*.

A (n) convergence (γ) will be called the (n') *convergence* if following supplementary conditions are satisfied:

(n_1') *if* $\{y_n\}$ *is a sequence bounded in* Y *and* $\|y_n - y_0\|^* \to 0$, *then* $y_0 \in Y$;

(n_2') *if* $\|y_n\| \leqslant k (n=1,2,...)$, $y_0 \in Y$, $\|y_n - y_0\|^* \to 0$ *then* $\|y_0\| \leqslant k$.

For any (n') convergence the axiom of Cauchy is satified: *if* $(\gamma) \lim\limits_{n\to\infty} (y_{p_n} - y_{q_n}) = 0$ *for arbitrary sequences* $p_n \to +\infty$, $q_n \to +\infty$, *then there is an element* $y_0 \in Y$ *such that* $(\gamma) \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

The space Y with convergence (γ) is a limit space in sense of Fréchet, moreover addition of elements and multiplication by real numbers are continuous. The condition (n) may be replaced without loss of generality by the following stronger one

$$(n_1) \qquad \|y\|^* \leqslant \|y\|$$

i. e. if (n_1) is not satisfied we can allways introduce a norm $\|y\|_1$ equivalent with $\|y\|$ having property (n_1).

It is easy to show that the (n') convergence (γ) is either equivalent with the convergence generated by norm $\|y\|$ or (γ) is not equivalent with any convergence generated by distance in a metric space.

If Y is a (B_0) space, and if we replace the condition (n_2') by the following stronger one

$$(n'') \qquad \text{if } [y_n]_i \leqslant R_i (n=1,2,...),\ y_0 \in Y,\ \|y_n - y_0\|^* \to 0,$$

then $[y_0]_i \leqslant R_i (i=1,2,...)$, — then the convergence (γ) will be called (n'') convergence.

Examples.

(2.1) The convergence (γ) in M_1 is a (n') convergence if M_1 is the space of bounded Lebesgue measurable functions in $[0,1]$.

(2.2) Put $Y = V^*$, $Y^* = L$ [7]), $\|y\| = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |y(t)| + \operatorname*{ess\,var}\limits_{a \leqslant t \leqslant b} y(t)$,

$\|y\|^* = \int\limits_a^b |y(t)|\, dt$

---

[7]) V^* is the space of functions equivalent with functions of bounded variation; $\operatorname*{ess\,var}\limits_{a \leqslant t \leqslant b} y(t)$ is the least variation of functions of bounded variation equivalent with $y(t)$.

then

$(\gamma) \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ *means that* $\operatorname{essvar}_{a\leqslant t\leqslant b} y_n(t) \leqslant k(n=1,2,\ldots)$ *and* $y_n(t) \overset{as}{\to} y_0(t)$

(2.3) Put $Y=m$, $Y^*=s$[8]) and (writing $y=\{\eta_\nu\}$, $y_n=\{\eta_{n\nu}\}$)

$\|y\| = \sup_\nu |\eta_\nu|$, $\|y\|^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} |\eta_\nu| (1+|\eta_\nu|)^{-1}$, then

$(\gamma) \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ *means that* $|\eta_{n\nu}| \leqslant k(n,\nu=1,2,\ldots)$ *and* $\lim_{n\to\infty} \eta_{n\nu} = \eta_\nu$ *for* $\nu = 1,2,\ldots$

In all these examples (γ) is a (n'') convergence.

We will use following terminology and notations due to Orlicz. If we have in a linear space Y several definitions of limit, say $(\alpha), (\beta), \ldots$, satisfying the usual Fréchet postulates we shall denote by $Y_\alpha, Y_\beta, \ldots$ the set Y considered as a limit space, respectively with convergence $(\alpha), (\beta), \ldots$ In (F) spaces we consider usually only one definition of norm (the other possible ones are artificial and unfit for applications) then, if ν denotes the convergence generated by norm in Y (of (F) type), we shall omit the sign ν and write Y in place of Y_ν.

Suppose now X_α, Y_β are two limit spaces respectively with convergences (α) and (β). An additive and homogeneous operation $U(x)$ from X to Y will be said to be (X_α, Y_β) *linear* if $x_n \overset{(\alpha)}{\to} x_0$ implies $U(x_n) \overset{(\beta)}{\to} U(x_0)$.

Theorem 2. *Let Y be a (F) space. The general form of (M, Y) linear operation is*

$$U(x) = \int_S x(t)\, d\Phi \tag{2.4}$$

where $\Phi(E)$ is an additive function with property (v)[9]).

Proof. Write $\Phi(E) = U(C_E)$, this function is obviously additive. By linearity, for any $\varepsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ such that $\|x\| < \delta$ implies $\|U(x)\| < \varepsilon$. Let $E_i (i=1,2,\ldots m)$ be disjoint

---

[8]) See Banach (1) p. 10. This space is a space M corresponding to the set S of all integers, $\mathfrak{E}$ the class of all sets of integers, $\mu(E)$ arbitrary measure having property that only the empty set is of measure 0.

[9]) For functionals this theorem was stated by Hildebrandt (1) and Fichtenholz and Kantorovitch (1), for operations it was shown in the case when Y is a (B) space by Gowurin (1).

sets ($\mathfrak{E}$), $|a_i| < \delta$, and let $E_0 = S - \sum_{i=1}^{m} E_i$, $a_0 = 0$, $x = \{a_i, E_i\}_{i=0,\dots m}$; x is an element of M and $\|x\| < \delta$. Hence $\varepsilon > \|U(x)\| = \|\sum_{i=0}^{m} U(a_i C_{E_i})\| = \|\sum_{i=1}^{m} a_i \Phi(E_i)\|$, it follows that $\Phi(E)$ has property (v). Simultaneously we have shown that (2.4) holds for simple functions. Now, x being an arbitrary element of M, choose a sequence x_n of simple functions such that $\|x_n - x\| \to 0$. Then $\|U(x_n) - U(x)\| \to 0$; since $U(x_n) = \int_S x_n(t)\, d\Phi$, by definition of Fréchet-Radon integral there follows that $U(x) = \int_S x(t)\, d\Phi$.

Conversely, it is trivial, that any operation of described form is (M, Y) linear.

Theorem 3. *Let Y be a* (F) *space. The general form of* (M_γ, Y) *linear operation is* (2.4) *where* $\Phi(E)$ *is an additive function with property* (v) *and* (a).

Proof. The operation $U(x)$ is obviously (M, Y) linear, therefore of form (2.4) where $\Phi(E) = U(C_E)$ has property (v). $\Phi(E)$ has also property (a): let $\mu(E_n) \to 0$ and write $x_n(t) = C_{E_n}$; then $\|x_n\| \leqslant 1$, $x_n(t) \xrightarrow{as} 0$ it follows that $U(x_n) = \Phi(E_n) \to 0$. Conversely, by the theorem 1, we see that any operation of described form is (M_γ, Y) linear.

If (δ) is a (n) convergence in a (F) space Y, we can verify easily that the class of (M, Y_δ) linear operations is identic with this of (M, Y) linear operations.

Now following question arises: do there exist linear operations from M to a (F) space which are not isomorphic with operations from M to a (B_0) space, more precisely: Y being a (F) space not isomorphic with any (B_0) space, does there exist a linear operation $U(x)$ from M to Y such that the minimal linear closed set containing all values of $U(x)$ is not isomorphic with any (B_0) space. The answer is positive. We shall give two examples of such operations. The construction will be based upon the following theorem of Mazur and Orlicz.

(2.5) *A* (F) *space Y is isomorphic with a* (B_0) *space if and only if the following condition is satisfied:*

(2.6) *if* $y_n \to 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta_n| < +\infty$ (ϑ_n *being real numbers*), *then the series* $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n y_n$ *is convergent.*

Taking into account that this theorem was not published, we shall prove it here by author's kind permission.

The necessity is evident. To prove the sufficiency, we show first that the following condition is also necessary and sufficient:

(2.7) *for every* $\varepsilon > 0$ *there is a* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *such that the convex extension of the sphere* $\|y\| \leqslant \delta$ *is contained in the sphere* $\|y\| \leqslant \varepsilon$.

The necessity of this condition is easy, we prove only its sufficiency. Write $\delta_n = \delta(1/n)$, and denote by C_n the convex extension of the sphere $\|y\| \leqslant \delta_n$. Denote by $\Theta_n(y)$ the Minkowski[10] functional of the set C_n, and write $[y]_n = \Theta_n(y)$. These functionals being continuous in 0, we see that $\|y_i\| \to 0$ implies $[y_i]_n \to 0$ for $n = 1, 2, \ldots$; conversely if $\lim_{i\to\infty} [y_i]_n = 0$ for $n = 1, 2, \ldots$, then $[y_i]_n = \Theta_n(y_i) \leqslant 1$ for $i \geqslant i(n)$ i. e. $y_i \in C_n$ for $i \geqslant i(n)$ hence $\|y_i\| \leqslant 1/n$.

We show now that the condition (2.6) implies the condition (2.7). Suppose the contrary, then there is an $\varepsilon_0 > 0$ and for every n there are elements $y_{n1}, y_{n2}, \ldots y_{n\lambda_n}$ and numbers $\vartheta_{n1}, \vartheta_{n2}, \ldots \vartheta_{n\lambda_n}$ such that $\vartheta_{ni} \geqslant 0$, $\vartheta_{n1} + \vartheta_{n2} + \ldots + \vartheta_{n\lambda_n} = 1$, $|y_{ni}| \leqslant 1/n^3$ ($i = 1, \ldots \lambda_n$) and $\|\vartheta_{n1} y_{n1} + \vartheta_{n2} y_{n2} + \ldots + \vartheta_{n\lambda_n} y_{n\lambda_n}\| \geqslant \varepsilon_0$. Write for $m = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n + i$ where $1 \leqslant i \leqslant \lambda_{n+1}$: $\bar{y}_m = n^2 y_{ni}$, $\bar{\vartheta}_m = (1/n^2)\vartheta_{ni}$, then $\bar{y}_m \to 0$, $\sum_{m=1}^{\infty} |\bar{\vartheta}_m| < +\infty$; the series $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_m \bar{y}_m$ can not be, howerer, convergent since $\|\sum_{m=p_n}^{p_{n+1}} \bar{\vartheta}_m \bar{y}_m\| \geqslant \varepsilon_0$ if $p_n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Let Y be a (F) space not isomorphic with any (B_0) space. Denote first by $M_0 = m$ the space considered in (2.3). In Y, there is a sequence y_n for which the condition (2.5) is not satisfied. By a theorem of Eidelheit and Mazur (1), we can assume that $|\vartheta'| < |\vartheta''|$ implies $\|\vartheta' x\| < \|\vartheta'' x\|$. Choose $\lambda_n \neq 0$ such that $\|\lambda_n y_n\| < 1/2^n$, and write for $x = \{\xi_n\} \in m = M_0$

$$U(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu \lambda_\nu y_\nu$$

the series is convergent, moreover, its sum is a $(M_{0\gamma}, Y)$ linear operation: let $x_n \xrightarrow{(\gamma)} 0$ then if $x_n = \{\xi_{n\nu}\}$ we have $|\xi_{n\nu}| < K$, $(n, \nu = 1, 2, \ldots)$ and $\lim_{n\to\infty} \xi_{n\nu} = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. From the inequality

$$\|U(x_n)\| \leqslant \|\sum_{\nu=1}^{p} \xi_{n\nu} \lambda_\nu y_\nu\| + \|\sum_{\nu=p+1}^{\infty} \xi_{n\nu} \lambda_\nu y_\nu\| \leqslant \|\sum_{\nu=1}^{p} \xi_{n\nu} \lambda_\nu y_\nu\| + \sum_{\nu=p+1}^{\infty} (|\xi_\nu| + 1)\|\lambda_\nu y_\nu\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\sum_{\nu=1}^{p} \xi_{n\nu} \lambda_\nu y_\nu\| + \frac{K+1}{2^p}$$

we see easily that $U(x)$ is $(M_{0\gamma}, Y)$ linear.

---

[10]) Concerning the definition and details, reader may consult **Mazur (1)**.

The minimal linear closed set containing all values of $U(x)$ is, however, not isomorphic with any (B_0) space since it contains the elements $U(\lambda_n^{-1} e_n) = y_n$ (e_n denotes the n-th unit vector in M_0).

We show now that in the space M_1 considered in (2.1), there is also an $(M_{1\gamma}, Y)$ linear operation with desired properties. Let $\{h_n(t)\}$ denote the orthogonal system of Haar. Let $V(x)$ be an operation attributing to every $x \in M_1$ an element $V(x) = \{\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots\}$ where $\xi_n(x) = \int_0^1 h_n(t)\, x(t)\, dt$. From the well known properties of Haar's system (see for instance Schauder (1)), it follows that $V(x)$ is an element of M_0 and that $V(x)$ is a $(M_{1\gamma}, M_{0\gamma})$ linear operation. Hence the operation $W(x) = U(V(x))$ is (M_γ, Y) linear, and it is easy to prove that the minimal linear closed set containing all values of $W(x)$ is not isomorphic with any (B_0) space.

Theorem 4. *Let* (δ) *be a* (n) *convergence in a* (F) *space* Y. *The general form of* (M_γ, Y_δ) *linear operation is* (2.4) *where* $\Phi(E)$ *is an additive function having properties* (v) *and* (a^*)[11]).

Proof. We prove first that $U(x)$ is (M, Y) linear. Let $\|x_n\| \to 0$, then we can choose a sequence of numbers $\vartheta_n \to +\infty$ such that $x_n' = \vartheta_n x_n \to 0$. Since $x_n' \overset{(\gamma)}{\to} 0$ it follows that $U(x_n') \overset{(\delta)}{\to} 0$, in particular this sequence is bounded in Y, hence $\|\vartheta_n^{-1} U(x_n')\| = \|U(x_n)\| \to 0$. It follows that $U(x)$ is of form (2.4) with additive $\Phi(E)$ satisfying property (v). It remains to prove that $\Phi(E)$ has property (a^*). Let $\mu(E_n) \to 0$ and write $x_n(t) = C_{E_n}$. Since $x_n \overset{(\gamma)}{\to} 0$ we have $U(x_n) = \Phi(E_n) \overset{(\delta)}{\to} 0$ hence $\|\Phi(E_n)\|^* \to 0$.

Conversely, let $U(x)$ be of indicated form, and let $x_n \overset{(\gamma)}{\to} 0$. In particular $U(x)$ is (M, Y) linear; since $\vartheta_n x_n \to 0$ in M if $\vartheta_n \to 0$, we infer that $\|U(\vartheta_n x_n)\| = \|\vartheta_n U(x_n)\| \to 0$, the sequence is then bounded in Y. Since $U(x)$ is obviously (M_γ, Y^*) linear, $x_n \overset{(\gamma)}{\to} 0$ implies $\|U(x_n)\|^* \to 0$ and this completes the proof.

4. Now we shall add some supplementary remarks concerning foregoing results.

If we restrict ourselves to (B_0) or (B) spaces, we may give simple conditions for $\Phi(E)$ to have property (a). We say that $\Phi(E)$ *satisfies weakly property* (a) if the real function $\eta(\Phi(E))$, $\eta = \eta(y)$ being an arbitrary linear functional over Y,

---

[11]) These operations were studied (by a different method) by Fichtenholz (2) in the special case when $Y_\delta = M_\gamma$.

satisfies property (a). We say also that $\Phi(E)$ is *weakly absolutely additive* if for an arbitrary linear functional $\eta=\eta(y)$ over Y, we have $\eta(\Phi(\sum_{n=1}^{\infty} E_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\eta(\Phi(E_n))$.

It can be shown [12]) that:

(4.1) *An additive function $\Phi(E)$ has property (v) if it satisfies weakly property (a), or if it is weakly absolutely additive.*

From this we get easily, denoting by (σ) the weak convergence in Y:

Theorem 5. *The class of (M_γ, Y_σ) linear operations is identic with this of (M_γ, Y) linear operations.*

Orlicz (1) has given many necessary and sufficient conditions that an additive operation from M to Y should be (M_γ, Y) linear. We can interprete some of them as necessary and sufficient conditions for $\Phi(E)$ to have property (a). E. g. we get:

(4.2) *Let Y be one of spaces L^p $(p\geqslant 1)$, L^M(where $M(2n)\leqslant kM(n))$ [13])), V^*, C. Then the necessary and sufficient condition that an additive function $\Phi(E)$ having property (v) should have property (a) is that* $\lim_{n\to\infty}$ as $\Phi(E_n)=0$, *if* $\mu(E_n)\to 0$ [14]).

Let now Y be a (B) space. If $U(x)$ is a (M, Y) linear operation, its norm $\|U\|$ satisfies the following inequalities

$$(4.3) \qquad \sup_{E\subset S}\|\Phi(E)\|\leqslant\|U\|\leqslant 2\sup_{E\subset S}\|\Phi(E)\|.$$

The first of them is obvious, to obtain the second it is sufficient to show it for simple functions. We have for $x=\{a_\nu, E_\nu\}_{\nu=1,\dots m}$: $\|U(x)\|=\|\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu\Phi(E_\nu)\|\leqslant 2\sup_{\varepsilon_\nu=0,1}\|\sum_{\nu=1}^{m}\varepsilon_\nu\Phi(E_\nu)\|\cdot$ $\cdot\max_{\nu=1,\dots m}|a_\nu|\leqslant 2\|x\|\sup_{E\subset S}\|\Phi(E)\|$.

The linear space H of all linear functionals $\eta(y)=\eta$ over Y with norm $\|\eta\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|\eta(y)|$ is called *the conjugate space* (to Y).

---

[12]) This theorem is due to Pettis, Bull. Am. Math. Soc. 42—2 (1939), abstract; see also Alexiewicz (1).

[13]) Concerning the definition of spaces L^M, see Orlicz (2).

[14]) $\mu(E)$ denotes here the Lebesgue measure.

The space Y is said to be *reflexive* if every functional $\mathfrak{y}(\eta)$ linear over H is of form $\mathfrak{y}(\eta)=\eta(y_0)$, where y_0 is an element of Y.

Theorem 6. *Let Y be a reflexive (B) space, and let M_0 be a separable subspace of M. The general form of (M_0, Y) linear operation is*

$$U(x)=\int_S x(t)\,d\Phi$$

where $\Phi(E)$ is an additive function with property (v). Moreover

$$\sup_{E\subset S}\|\Phi(E)\|\leqslant\|U\|\leqslant 2\sup_{E\subset S}\|\Phi(E)\|.$$

Proof. Let $\eta\in H$, then $\overline{\eta}(x)=\eta(U(x))$ is a linear functional over M_0. By the theorem of extension of linear functionals (Banach (1) p. 55), it follows that $\overline{\eta}(x)=\eta(U(x))=\int_S x(t)\,d\Psi$ where $\Psi(E)=\Psi_{,}(E)$ is an additive real, bounded function, moreover $\sup_{E\subset S}|\Psi(E)|\leqslant\|\overline{\eta}\|\leqslant 2\sup_{E\subset S}|\Psi(E)|$. This extension is not unique, but for any extension we have $|\overline{\eta}(x)|=|\eta(U(x))|\leqslant$ $\leqslant\|\eta\|\cdot\|U\|\cdot\|x\|$, $\|\overline{\eta}\|=\sup_{\substack{x\in M_0\\ \|x\|\leqslant 1}}|\overline{\eta}(x)|\leqslant\|\eta\|\cdot\|U\|$ it follows that

$$\sup_{E\subset S}|\Psi(E)|\leqslant\|\eta\|\cdot\|U\|. \tag{4.4}$$

M_0 being separable, the minimal linear closed set Y_0 containing all values of $U(x)$ is also separable. Let $\{\eta_n\}$ be a sequence of linear functionals, weakly dense on the unit sphere in H_0 (the conjugate to Y_0). We have $\eta_n(U(x))=\int_S x(t)\,d\Psi_n$ where $\Psi_n(E)$ is a real additive function and $\sup_{E\subset S}|\Psi_n(E)|\leqslant$ $\leqslant\|\eta_n\|\cdot\|U\|=\|U\|$. Let $t_1, t_2, \ldots t_m$ be arbitrary real numbers, let $\eta(y)=\sum_{i=1}^{m}t_i\eta_i(y)$; it is an element of H and we may write

$$\eta(U(x))=\int_S x(t)\,d\Psi \qquad \textit{where } \Psi(E)=\sum_{i=1}^{m}t_i\Psi_i(E).$$

By (4.4), we have $\sup_{E\subset S}|\Psi(E)|\leqslant\|\eta\|\cdot\|U\|=\|t_1\eta_1+t_2\eta_2+\ldots+$ $+t_m\eta_m\|\cdot\|U\|$. Keep E fixed, and write $a_i=\Psi_i(E)$ $(i=1,2,\ldots m)$,

by the last inequality

$$|t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_m a_m| \leqslant \|t_1 \eta_1 + t_2 \eta_2 + \ldots + t_m \eta_m\| \cdot \|U\|.$$

Hence, by a theorem of HELLY (see for instance KAKUTANI (1)), there is, for any n, an element $y_n \in Y$ such that

$$(4.5) \qquad \eta_1(y_n) = a_1, \quad \eta_2(y_n) = a_2, \ldots, \eta_n(y_n) = a_n, \quad \|y_n\| \leqslant \|U\| + 1/n.$$

The sequence $\{\eta_j(y_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ is then convergent for $j = 1, 2, \ldots$

The space Y being reflexive, Y_0 is reflexive too. (Pettis (1)) In reflexive spaces the weak convergence of functionals has the same properties as this of elements, hence we deduce, by the weak density of the sequence $\{\eta_n\}$, that the sequence $\mathfrak{y}_n(\eta) = \eta(y_n)$ of linear functionals over H_0 is convergent in a dense set of elements; by the second inequality of (4.5) it is also bounded. By a theorem of BANACH-STEINHAUS (Banach (1) p. 79), the sequence is convergent for every $\eta \in H_0$. The space Y_0 is weakly complete (Pettis (1)), hence there is an element $y = \Phi(E)$ such that $\lim\limits_{n\to\infty} \eta(y_n) = \eta(\Phi(E))$ for every $\eta \in H_0$. We can prove easily that the function $\Phi(E)$ is additive. By the second inequality of (4.5): $\sup\limits_{E \subset S} \|\Phi(E)\| \leqslant \|U\|$.

We have then shown that $\eta_j(\Phi(E)) = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_j(y_n) = a_j = \Psi_j(E)$, it follows that $\eta_j(U(x)) = \int\limits_S x(t)\, d\eta_j(\Phi) = \eta_j(\int\limits_S x(t)\, d\Phi)$. This relation holds in a weakly dense set η_j, then it is valid for every $\eta \in H_0$, hence $U(x) = \int\limits_S x(t)\, d\Phi$. In (4.3) we have shown that $\|U\| \leqslant 2 \sup\limits_{E \subset S} \|\Phi(E)\|$ and this completes the proof.

From the theorem 6, we deduce the following generalization of a theorem of MAZUR (see Banach (1), p. 72).

Theorem 7. *Let Y be a reflexive (B) space, and let M_0 be a separable subspace of M. The general form of (M_0, Y) linear operation is*

$$(4.6) \qquad U(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_S x(t)\, h_n(t)\, dt,$$

where $h_n(t)$ are abstract functions (defined in S with values in $\mathbf{Y}$) integrable in the sense of BOCHNER[15]). *Moreover*

$$\|U\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{E\subset S} \|\int_E h_n(t)\,dt\|, \quad \|\int_E h_n(t)\,dt\| \leqslant \|U\|.$$

Proof. Denote by $\{x_n\}$ an enumerable set, dense in M_0. By the theorem 6: $U(x) = \int_S x(t)\,d\Phi$, where $\Phi(E)$ is an additive function and $\sup_{E\subset S}\|\Phi(E)\| \leqslant \|U\| \leqslant 2\sup_{E\subset S}\|\Phi(E)\|$. For any n there are disjoint sets $\{E_{nj}\}_{j=1,\dots,k_n}$, $S = \sum_{j=1}^{n} E_{nj}$ such that the oscillation of $x_i(t)$ on E_{nj} is less than $\frac{1}{n}$ for $i=1,..,n;\ j=1,..,k_n$. Write $h_n(t) = \Phi(E_{nj})/\mu(E_{nj})$ for $t \in E_{nj}$ if $\mu(E_{nj}) > 0$, $h_n(t) = 0$ in the contrary case. The functions $h_n(t)$ are simple, and therefore BOCHNER integrable and $\|\int_E h_n(t)\,dt\| \leqslant 2\sup_{E\subset S}\|\Phi(E)\|$. Let $t_{nj} \in E_{nj}$, and let $i \leqslant n$, put $a_{nj} = x_i(t_{nj})$; we have $\|\int_S x_i(t)\,h_n(t)\,dt - \int_S x_i(t)\,d\Phi\| \leqslant \|\int_S x_i(t)\,h_n(t)\,dt -$

$$-\sum_{j=1}^{k_n} a_{nj}\Phi(E_{nj})\| + \|\sum_{j=1}^{k_n} a_{nj}\Phi(E_{nj}) - \int_S x_i(t)\,d\Phi\| = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \|\sum_{j=1}^{k_n} \int_{E_{nj}} [x_i(t) - a_{nj}]\,h_n(t)\,dt\| \leqslant 2\cdot\frac{1}{n}\sup_{E\subset S}\|\int_E h_n(t)\,dt\| \leqslant \frac{4}{n}\|U\|,$$

$$A_2 = \|\sum_{j=1}^{k_n} [a_{nj}\Phi(E_{nj}) - \int_{E_{nj}} x_i(t)\,d\Phi]\| = \|\sum_{i=1}^{k_n} \int_{E_{nj}} [a_{nj} - x_i(t)]\,d\Phi\| \leqslant \frac{4}{n}\|U\|.$$

The formula (4.6) is then valid for every $x = x_n$. The norm $\|V_n\|$ of the operation $V_n(x) = \int_S x(t)\,h_n(t)\,dt$ satisfies obviously the inequality $\|V_n\| \leqslant 2\|U\|$, then by a theorem of BANACH-STEINHAUS (Banach (1), p. 79) the sequence is convergent in M_0 and its limit is (M_0, Y) linear. The relation (4.5) being true in the dense set $\{x_n\}$, it must hold in the whole of M_0. It is easy to choose sets E_{nj} in such a manner that

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{E\subset S} \|\int_S h_n(t)\,dt\| - \|U\| \geqslant 0.$$

---

15) See S. Bochner (1).

5. Mazur and Orlicz (1) have shown that in (F) spaces X and Y the limit of a convergent sequence of (X, Y) linear operations is (X, Y) linear. In linear spaces with a definition of limit more general than that in (F) spaces, this theorem may be false. In particular, for (X_γ, Y) linear operations, (γ) being even a (n') convergence in X, this theorem is no longer true in general as may be verified on the example of linear functionals over V_γ^*.

In this paragraph we show that this theorem remains true for linear operations in M_γ.

According to our terminology a sequence convergent in sense of a definition (α) of limit will be called (α) *convergent*, and if (α) is a convergence generated by norm in a (F) space, the sequence will be said to be convergent.

Theorem 8. *Let Y be a (F) space, and let $\{U_n(x)\}$ be a sequence of (M_γ, Y) linear operations convergent to $U(x)$ for every x; then the limit-operation is (M_γ, Y) linear*[16].

Proof. By the theorem 3: $U_n(x) = \int_S x(t)\, d\Phi_n$, where $\Phi(E)$ is an additive function with properties (v) and (a). $U_n(x)$ are also (M, Y) linear, then their limit $U(x)$ is also (M, Y) linear, hence of form $\int_S x(t)\, d\Phi$ with $\Phi(E)$ satisfying property (v). It is obvious that $\Phi_n(E) \to \Phi(E)$ for $E \in \mathfrak{E}$ hence by a generalization of Hahn-Saks-Steinhaus[17]) theorem $\Phi(E)$ has also property (a).

Theorem 9. *Suppose μ is not singular. Let Y be a (B_0) space, let $\{U_n(x)\}$ be a sequence of (M_γ, Y) linear operations convergent for every $x = x(t)$ being a characteristic function; then the sequence is convergent for every x.*

Proof. We have $U_n(x) = \int_S x(t)\, d\Phi_n$, where $\Phi_n(E) = U_n(C_E)$ are additive functions with properties (v) and (a). By hypothesis $\Phi_n(E) \to \Phi(E)$ for every $E \in \mathfrak{E}$, then by the generalized Hahn-Saks-Steinhaus theorem, it follows that $\Phi(E)$ has pro-

---

[16]) This theorem is due to Orlicz (1).

[17]) See, for instance, Alexiewicz (1).

perty (a), moreover $\|\Phi_n(E_n)\| \to 0$ if $\mu(E_n) \to 0$. From the last relation we deduce that $[\Phi_n(E_n)]_i \to 0$ if $\mu(E_n) \to 0$ for $i = 1, 2, \ldots$; hence there is a constant k_i such that $[\int_S x(t)\, d\Phi]_i \leqslant \|x\| k_i$ for every x being a characteristic function and, in consequence, for any simple function. By passage to the limit we verify that this relation holds for arbitrary elements of M, hence the sequence $\{U_n(x)\}$ is bounded for every $x \in M$. From hypothesis it follows obviously that the sequence is convergent for every x being a simple function. Since simple functions form a dense set in M, we infer by the BANACH-STEINHAUS theorem that the sequence is convergent everywhere.

Theorem 10. *Let (δ) be a (n') convergence in a (F) space Y, and let $\{U_n(x)\}$ be a sequence of (M_γ, Y_δ) linear operations (δ) convergent to $U(x)$ for every x. Then $U(x)$ is (M_γ, Y_δ) linear.*

Proof. Note first that these operations are (M, Y) linear and are bounded in Y for every x. Then, by a theorem of MAZUR and ORLICZ (1), for every $\varepsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ such that $\|U_n(x)\| < \varepsilon$ for $\|x\| < \delta$, $n = 1, 2, \ldots$. From (n_2') it follows that $\|U(x)\| \leqslant \varepsilon$ for $\|x\| \leqslant \delta$. Hence $U(x)$ is (M, Y) linear, it follows that $U(x) = \int_S x(t)\, d\Phi$ with additive $\Phi(E)$ satisfying property (v). Since $\Phi_n(E)$ have also property (a^*) and since $\|\Phi_n(E) - \Phi(E)\|^* \to 0$ in $\mathfrak{E}$, we deduce as in the preceeding theorem that $\Phi(E)$ has this property too.

Using the inequality (1.4) we can prove that

(5.1) *The hypothesis of the theorem 10 implies that $U_n(x_n) \xrightarrow{(\delta)} 0$ if $x_n \xrightarrow{(\gamma)} 0$.*

6. Now we shall generalize the theorem 9 for (M_γ, Y_δ) linear operations, δ being a (n) convergence, but we can state it in a less general form.

Suppose Y is a (B_0) space and suppose that the measure in $\mathfrak{E}$ has the following property

(6.1) *For every $\varepsilon > 0$ there is a N such that every set E can be written in form $E = H_1 + H_2 + \ldots + H_N$, where H_i are disjoint and $\mu(H_i) < \varepsilon$ for $i = 1, 2, \ldots N$.*

This condition is satisfied e. g. if $\mathfrak{E}$ is the family of Lebesgue measurable sets and μ is the Lebesgue measure.

If we dont make distinction between two sets which differ only by sets of measure 0, we can consider the set $\mathfrak{E}$ as a complete metric space, the distance of two elements E_1 and E_2 being defined by the formula $(E_1, E_2) = \mu(E_1 + E_2 - E_1 E_2)$.

Denote by A the family of additive functions $\Phi(E)$ defined in $\mathfrak{E}$ satisfying the following property: *for every i and k, the set of elements E for which $[\Phi(E)]_i \leqslant k$ is closed (in $\mathfrak{E}$).*

We prove first a lemma:

(6.2) *Let $\{\Phi_n(E)\}$ be a sequence of functions of A, bounded for every E, then the sequence is bounded uniformly i. e. for any sequence $\{E_n\}$ the sequence $\{\Phi_n(E_n)\}$ is bounded.*

Proof. It is sufficient to prove that for every i there is a k_i such that $[\Phi_n(E)]_i \leqslant k_i$ for every $E \in \mathfrak{E}$. Denote by $\mathfrak{Y}_k$ the class of those E for which $[\Phi_n(E)]_i \leqslant k$ for $n = 1, 2, \ldots$. These sets are closed and by hypothesis $\mathfrak{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Y}_n$, hence one of these sets, say $\mathfrak{Y}_{k_0}$, contains a sphere. Let E_0 be the centre and δ the radius of this sphere. For $(E, E_0) < \delta$ we have then $[\Phi_n(E)]_i \leqslant k_0$ for $n = 1, 2, \ldots$.

We shall prove that $[\Phi_n(E)]_i \leqslant 2k_0$ if $\mu(E) < \delta$, $n = 1, 2, \ldots$. Write $H_1 = E_0 + E$, $H_2 = E_0 - E$, we see that $(E_0, H_1) < \delta$, $(E_0, H_2) < \delta$, hence $[\Phi_n(H_1)]_i \leqslant k_0$, $[\Phi_n(H_2)]_i \leqslant k_0$; but $\Phi_n(E) = \Phi_n(H_1) - \Phi_n(H_2)$ it follows that $[\Phi_n(E)]_i \leqslant [\Phi_n(H_1)]_i + [\Phi_n(H_2)]_i \leqslant 2k_0$. In virtue of (6.1) there is an $N = N(\delta)$ such that every set E is a sum of less than N disjoint sets of measure less than δ, hence $[\Phi_n(E)]_i \leqslant 2Nk_0 = k_i$ for $n = 1, 2, \ldots$.

Let now (δ) be a (n'') convergence in a (B_0) space Y. Let us observe now that the additive functions $\Phi(E)$ having properties (v) and (a^*) belong to A. In fact, suppose that $[\Phi(E_n)]_i \leqslant k$ and $(E_n, E) \to 0$. Then $\|\Phi(E_n) - \Phi(E)\|^* = \|\Phi(E_n - EE_n) - \Phi(E - EE_n)\|^* \leqslant \|\Phi(E_n - EE_n)\|^* + \|\Phi(E - EE_n)\|$, since $\mu(E_n - EE_n) \leqslant (E_0, E_n)$, $\mu(E - EE_n) \leqslant (E_0, E_n)$, we see that $\|\Phi(E_n) - \Phi(E)\|^* \to 0$, hence, by (n''), $[\Phi(E)]_i \leqslant k$.

Theorem 11. *Let (δ) be a (n'') convergence in a (B_0) space Y, and let $\{U_n(x)\}$ be a sequence of (M_γ, Y_δ) linear operations (δ) con-*

vergent for every $x = x(t)$ being a characteristic function. Then the sequence is convergent for every x[18]).

Proof. Since these operations are (M_γ, Y^*) linear, there is by the theorem 9 an operation $U(x)$ which is (M_γ, Y^*) linear such that $\|U_n(x) - U(x)\|^* \to 0$. To prove the theorem, we shall show that this sequence is bounded in Y i. e. that there are $m_i = m_i(x)$ such that $[U_n(x)]_i \leqslant m_i(x)$ for $n = 1, 2, \ldots$ Since $U_n(x) = \int x(t)\, d\Phi_n$ where $\Phi_n(E)$ belong to A and since the sequence is bounded for every E, there are, by (6.2), numbers k_i such that $[\Phi_n(E)]_i \leqslant k_i$ for every $E \epsilon \mathfrak{E}$, $n = 1, 2, \ldots$; let $x = \{a_n, E_n\}_{n=1,2,\ldots m}$ be a simple function, from the last inequality it follows $[U(x)]_i =$
$= [\sum_{n=1}^{m} a_n \Phi(E_n)]_i \leqslant 2 \max_{n=1,\ldots m} |a_n| \cdot \sup_{\varepsilon_n = 0,1} [\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n \Phi(E_n)]_i \leqslant 2 k_i \|x\| = m(x)$,
since this is valid for simple functions, this inequality must hold also for every x.

7. The BANACH-STEINHAUS theorem (Banach (1), p. 79) called also "Resonanztheorem" is not true for linear operations in M_γ, it is no longer true for linear functionals as may easily be shown by an example. From results of my thesis it follows, that the BANACH-STEINHAUS theorems of condensation of singularities (Banach (1), p. 25, 81) may be generalized[19]) for the space M_γ as follows:

Theorem 12. *Let (δ) be a (n') convergence in a (F) space Y, and let $\{U_{pq}(x)\}_{q=1,2,\ldots}$ be a sequence of (M_γ, Y_δ) linear operations (δ) divergent [(δ) non bounded] for $x = x_p$. Then there is an element x_0 such that the sequences $\{U_{pq}(x_0)\}_{q=1,2,\ldots}$ are (δ) divergent [(δ) non bounded] for $p = 1, 2, \ldots$.*

The results of foregoing paragraphs may be generalized also for polynomials in M_γ. The operations of degree m (from a linear space to an other linear space) have been defined by MAZUR and ORLICZ (2). Suppose in X and in Y there are respectively two definitions of limits (α) and (β), then an operation of degree m from X to Y will be called (X_α, Y_β) *polynomial* of degree m if $x_n \overset{(\alpha)}{\to} x_0$ implies $U(x_n) \overset{(\beta)}{\to} U(x_0)$.

[18]) This theorem was shown in particular case $Y_\delta = M_\gamma$ by Fichtenholz (2).

[19]) See Alexiewicz (1).

From results of my thesis and from (5.1) it follows:

Theorem 13. *Let* (δ) *be a* (n') *convergence in a* (F) *space* Y, *and let* $\{U_n(x)\}$ *be a sequence of* (M_γ, Y_δ) *polynomials of degree* $\leqslant m$, (δ) *convergent for every* x. *Then the limit operation is* (M_γ, Y_δ) *polynomial of degree* $\leqslant m$ [20]).

Theorem 11 formulated as in paragraph is, however, false. It is true in the following form:

Theorem 14. *Let* (δ) *be a* (n'') *convergence in a* (B_0)*-space* Y, *and let* $\{U_n(x)\}$ *be a sequence of* (M_γ, Y_δ) *polynomials of degree* $\leqslant m$, (δ) *convergent for every* $x = x(t)$ *being a function taking only a finite number of integer values. Then the sequence is everywhere convergent.*

8. In this paragraph Y is a (B) space. We shall consider now the following convergence in M.

(β) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *means that* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|x_n\| < +\infty$ *and* $x_n(t) \to x_0(t)$ *almost everywhere* [21]).

To consider this convergence it is not necessary to suppose that a measure μ is defined in $\mathfrak{E}$, it is sufficient to suppose only that a Borel subclass $\mathfrak{E}_0$ of $\mathfrak{E}$ is defined, and the sets $(\mathfrak{E}_0)$ are called null sets. Then we can define the Fréchet-Radon integral as in paragraph 1. An additive function will be called absolutely additive if $\Phi(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n)$, $\{E_n\}$ being an arbitrary sequence of disjoint sets. Following theorems can be proved:

Theorem 15. *Let* Y *be a* (B) *space [let* (δ) *be a* (n) *convergence in a* (B) *space], then the general form of* (M_β, Y) *linear operation [*(M_β, Y_δ) *linear operation] is* (2.4), *where* $\Phi(E)$ *is a function absolutely additive [absolutely additive in* Y^**] with property* (v).

---

20) This theorem was shown for polynomials in (F) spaces by Mazur and Orlicz (2).

21) i. e. excepted a null set. This convergence was considered first by Fichtenholz (1), (2).

Theorem 16. *Let* (δ) *be a* (n) *convergence in a* (B) *space, and let* $\{U_n(x)\}$ *be a sequence of* (M_β, Y_δ) *linear operations* (δ) *convergent to* $U(x)$ *for every* x. *Then* $U(x)$ *is* (M_β, Y_δ) *linear.*

Theorem 17. *The limit of a weakly convergent sequence of* (M_β, Y) *linear operations is* (M_β, Y) *linear.*

Theorems 9, 10 remain also true for linear operations in M_β.

9. Now we shall give an example of a linear operation in M_γ [22].

Denote by M the space M_1 considered in (2.1). Let $\{\varphi_n(t)\}$ be an orthogonal system composed of bounded functions, complete in $L^p (p > 1)$. A sequence $\{\lambda_n\}$ is called the *muliplicator of class* (M, L^p), if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ being the Fourier development of an element $x = x(t) \in M$, the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \varphi_n(t)$ is the Fourier development of an element $y(s) = U(x, s)$ of L^p. The function $U(x, s)$ is uniquely determined, since $\{\varphi_n(t)\}$ is complete. It is known that $U(x) = U(x, s)$ is a (M, L^p) linear operation; we shall prove that it is (M_γ, L^p) linear.

The following property holds for $U(x, s)$:

$$\lambda_i \int_0^1 \varphi_i(\vartheta)\, x(\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^1 \varphi_i(\vartheta)\, U(x, \vartheta)\, d\vartheta. \tag{9.1}$$

$U(x)$ is (M, L^p) linear, hence of form $\int_0^1 x(t)\, d\Phi$, where $\Phi(E)$ is additive and $\|\Phi(E)\| \leqslant K$ for measurable sets E. It is sufficient to show that $\mu(E) = 0$ implies $\Phi(E) = 0$ and that $\Phi(E)$ is weakly absolutely additive.

If $\mu(E) = 0$, then by (9.1): $\int_0^1 \varphi_i(\vartheta)\, U(C_E, \vartheta)\, d\vartheta = 0$, hence $U(C_E, \vartheta) = \Phi(E) = 0$, since $\varphi_n(t)$ is a complete system.

Let $\{E_n\}$ be a sequence of disjoint sets, let $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$. By (9.1) $\lambda_i \int_E \varphi_i(\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^1 \varphi_i(\vartheta)\, \Phi(E, \vartheta)\, d\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \varphi_i(\vartheta)\, \Phi(E_n, \vartheta)\, d\vartheta$; considering $\int_0^1 \varphi_i(\vartheta)\, y(\vartheta)\, d\vartheta$ as a linear functional $\eta_i(y)$ in L^p, we see that

[22] This result is analogous to one of Fichtenholz (2); $\mu(E)$ denotes here the Lebesgue measure.

$\eta_i(\Phi(E)) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_i(\Phi(E_n))$. Since L^p is reflexive and the system $\{\varphi_n(t)\}$ is complete, then the set of all linear combinations of η_i is dense in the conjugate space (Banach (1), p. 58); hence (Banach (1), p. 133) the series $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n)$ is weakly convergent to $\Phi(E)$.

LITERATURE REFERED TO:

1. A. Alexiewicz. (1) *Sur les suites d'opérations*, to be published in Studia Mathematica, t. 10.

2. S. Banach. (1) *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

3. S. Bochner. (1) *Integration von Funktionen, deren Werte Elemente eines Wektorraumes sind*. Fund. Math. 20 (1933), p. 262—276.

4. M. Eidelheit. (1) *Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen*. Stud. Math. 6 (1936), p. 139—148.

5. M. Eidelheit and S. Mazur. (1) *Eine Bemerkung über Räume vom Typus (F)*. Stud. Math. 7 (1938), p. 159—161.

6. G. Fichtenholz. (1) *Sur les fonctionnelles linéaires continues au sens généralisé*. Rec. Math. 4 (1938), p. 193—214.

7. G. Fichtenholz. (2) *Sur une classe d'opérations fonctionnelles linéaires*, ibid., p. 215—226.

8. G. Fichtenholz and L. Kantorovitch. (1) *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*. Stud. Math. 5 (1935), p. 69—95.

9. M. Gowurin. (1) *Über die Stieltjesche Integration abstrakter Funktionen*. Fund. Math. 27 (1936), p. 254—268.

10. T. H. Hildebrandt. (1) *On bounded linear functional operations*. Trans. Am. Math. Soc. 36 (1934), p. 868—875.

11. S. Kakutani. (1) *Weak Topology and regularity of Banach spaces*. Proc. Imp. Ac. Tokyo 15 (1939), p. 169—173.

12. S. Mazur. (1) *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*. Stud. Math. 4 (1933), p. 70—84.

13. S. Mazur and W. Orlicz. (1) *Über Folgen linearer Operationen*. Stud. Math. 4 (1933), p. 152—157.

14. S. Mazur und W. Orlicz. (2) *Grundlegende Eigenschaften der Polynomischen Operationen*. I, ibid. 5 (1934), p. 50—68, II, ibid. p. 179—189.

15. W. Orlicz. (1) *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*, to be published in Studia Mathematica, t. 10.

16. W. Orlicz. (2) *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus (B)*. Bull. Ac. Polonaise (1932), p. 207—220.

17. B. J. Pettis. (1) *A note on regular Banach spaces*. Bull. Am. Math. Soc. 44 (1938), p. 420—429.

18. J. P. Schauder. (1) *Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems*. Math. Ztsch. 28 (1928), p. 317—320.

LINEAR OPERATIONS AMONG BOUNDED MEASURABLE FUNCTIONS II

By A. ALEXIEWICZ, Poznań

In this part we generalize some results of the first part[1]) for the space of abstract measurable functions.

Let X be a (B) space, and let S be an abstract set, $\mathfrak{E}$ a Borel class of subsets of S, $\mu(E)$ an absolutely additive measure-function in $\mathfrak{E}$ such that $\mu(S) < +\infty$. The definition of measurable functions from S to X has been given in principle by BOCHNER (1)[2]), who has also defined the Lebesgue integral for those functions for which $\int_S \|x(t)\| d\mu < +\infty$. We shall denote by $L\{X\}$ the linear space of all functions from S to X, integrable in BOCHNER sense; with norm $\|x\| = \int_S \|x(t)\| d\mu$, $L\{X\}$ is a (B) space.

By $M\{X\}$, we denote the linear space of all measurable and essentially bounded functions from S to X; with norm $\|x\| = \operatorname{es\,sup}_{t \in S} \|x(t)\|$, $M\{X\}$ is a (B) space.

We define the convergence (γ) in $M\{X\}$ analogously as in M[1]):

$$(\gamma) \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \textit{ means that } \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n\| < +\infty \textit{ and that } \|x_n(t) - x_0(t)\| \overset{as}{\to} 0.$$

It may be easily verified that (γ) is a (n') convergence, if we put $\widetilde{X} = M\{X\}$, $\widetilde{X}^* = L\{X\}$, $\|x\| = \operatorname{es\,sup}_{t\in S} \|x(t)\|$, $\|x\|^* = \int_S \|x(t)\| d\mu$.

The space $M\{X\}$ considered as a linear limit space with convergence (γ) will be denoted by $M_\gamma\{X\}$.

---

[1]) This Journal p. 140.

[2]) We presuppose the knowledge of the paper of Bochner. Numbers in brackets refer to the bibliography at the end of the first part of this paper.

The space $M\{X\}$ has following property:

Lemma. *Let $\|x_0\| \leqslant 1$, $\varepsilon > 0$, then there is a $\delta > 0$ such that each element $u \in M\{X\}$ satisfying the inequalities $\|u\| \leqslant 1$, $\|u\|^* < \delta$ may be written in form*

$$u = v_1 - v_2$$

where $\|v_1\| \leqslant 1$, $\|v_2\| \leqslant 1$, $\|x_0 - v_1\|^* < \varepsilon$, $\|x_0 - v_2\|^* < \varepsilon$.

Proof. Write $\bar{\varepsilon} = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{12\,u(s)}\right)$, $\delta = \bar{\varepsilon}^2$ and suppose $\|u\| < 1$, $\|u\|^* < \delta$. Put $E_1 = \underset{t}{E}\{\|u(t)\| \geqslant \bar{\varepsilon}\}$, we see that $\|u\|^* = \int_S \|u(t)\|\,d\mu \geqslant \int_{E_1} \|u(t)\|\,d\mu \geqslant \bar{\varepsilon}\mu(E_1)$, hence $\mu(E_1) \leqslant \delta/\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$. Now, write $E_2 = \underset{t}{E}\{\|u(t)\| < \bar{\varepsilon},\ \|x_0(t) + u(t)\| \leqslant 1\}$, $E_3 = \underset{t}{E}\{\|u(t)\| \leqslant \bar{\varepsilon},\ \|x_0(t) + u(t)\| > 1\}$. The sets E_i are disjoint and belong to $\mathfrak{E}$. Define for $t \in E_3$

$$\vartheta(t) = \frac{\|x_0(t) + u(t)\| + \bar{\varepsilon} - 1}{\|x_0(t) + u(t)\|},$$

$\vartheta(t)$ is a real measurable function and $0 < \vartheta(t) < (1+\bar{\varepsilon}) + \bar{\varepsilon} - 1 = 2\bar{\varepsilon}$. We put further

$$v_1(t) = \begin{cases} u(t) & \text{for } t \in E_1 \\ x_0(t) + u(t) & t \in E_2 \\ x_0(t) + u(t) + \vartheta(t)\,[x_0(t) + u(t)] & t \in E_3 \end{cases}$$

$$v_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \in E_1 \\ x_0(t) & t \in E_2 \\ x_0(t) - \vartheta(t)\,[x_0(t) + u(t)] & t \in E_3 \end{cases}$$

these functions are evidently elements of $M\{X\}$.

For $t \in E_1 + E_2$ we have $\|v_1(t)\| \leqslant 1$, and for $t \in E_3$: $\|v_1(t)\| = \|[1 - \vartheta(t)][x_0(t) + u(t)]\| = [1 - \vartheta(t)]\|x_0(t) + u(t)\| = 2 - \bar{\varepsilon} - \|x_0(t) + u(t)\| \leqslant 1 - \bar{\varepsilon} < 1$, hence $\|v_1(t)\| \leqslant 1$ for $t \in S$.

Similarly, for $t \in E_3$: $v_2(t) = (1 - \bar{\varepsilon})\dfrac{x_0(t) + u(t)}{\|x_0(t) + u(t)\|} + u(t)$, hence $\|v_2(t)\| \leqslant (1 - \bar{\varepsilon}) + \|u(t)\| \leqslant (1 - \bar{\varepsilon}) + \bar{\varepsilon} = 1$, if $t \in E_1 + E_2$ we have $\|v_2(t)\| \leqslant 1$; then $\|v_2(t)\| \leqslant 1$ also.

Write now $\|x_0 - v_1\|^* = \int_S \|x_0(t) - v_1(t)\| d\mu = \int_{E_1} + \int_{E_2} + \int_{E_3}$

$\int_{E_1} \leqslant \int_{E_1} 2\, d\mu = 2\mu(E_1) \leqslant 2\bar{\varepsilon}$

$\int_{E_2} = \int_{E_2} \|u(t)\| d\mu \leqslant \bar{\varepsilon}\mu(E_2) \leqslant \bar{\varepsilon}\mu(S)$

$\int_{E_3} = \int_{E_3} \|u(t) + \vartheta(t)[x_0(t) + u(t)]\| d\mu \leqslant \mu(E_3)(\bar{\varepsilon} + 2\sup_{t \in E_3} |\vartheta(t)|) \leqslant 5\bar{\varepsilon}\mu(S)$

then $\|x_0 - v_1\|^* \leqslant \bar{\varepsilon}\mu(S) + 2\bar{\varepsilon} \leqslant \varepsilon$, and further

$\|x_0 - v_2\|^* = \int_S \|x_0(t) - v_2(t)\| d\mu = \int_{E_1} + \int_{E_2} + \int_{E_3}$

$\int_{E_1} = \int_{E_1} \|x_0(t)\| d\mu = \mu(E_1) < \bar{\varepsilon}$, $\int_{E_2} = 0$

$\int_{E_3} = \int_{E_3} |\vartheta(t)| \|x_0(t) - u(t)\| d\mu \leqslant 2 \int_{E_3} |\vartheta(t)| d\mu \leqslant 2 \sup_{t \in E_3} |\vartheta(t)| \cdot \mu(E_3) \leqslant 4\bar{\varepsilon}\mu(S)$,

hence $\|x_0 - v_2\|^* \leqslant \bar{\varepsilon} + 4\bar{\varepsilon}\mu(S) < \varepsilon$. It is obvious that $u(t) = v_1(t) - v_2(t)$.

Theorem 1. *Let Y be a (F) space, and let $\{U_n(x)\}$ be a sequence of $(M_\gamma\{X\}, Y)$ linear operations convergent for each x to $U(x)$. Then $U(x)$ is $(M_\gamma\{X\}, Y)$ linear. Moreover $x_n \xrightarrow{\gamma} 0$ implies $U_n(x_n) \to 0$.*

Proof. Denote by X_1 the set of these elements $x(t)$ of $M\{X\}$ for which $\|x(t)\| \leqslant 1$. Define the distance (x_1, x_2) of two elements $x_1, x_2 \in X_1$ by formula $(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|^*$. Since condition (n') is satisfied in $M_\gamma\{X\}$, the space X_1 is metric and complete.

Write $V_n(x) = U_n(x | X_1)$, $V(x) = U(x | X_1)$, these operations are continuous in X_1 and have the property that $V_n(x_1 - x_2) = V_n(x_1) - V_n(x_2)$ provided that x_1, x_2; $x_1 - x_2 \in X_1$, the same property has also $V(x)$. Since $V_n(x) \to V(x)$ for each $x \in X_1$, these operations are equicontinuous in a point x_0 i. e. for every $\eta > 0$ there is a $\varepsilon > 0$ such that $\|x - x_0\|^* < \varepsilon$ implies $\|V_n(x_0) - V_n(x)\| < \eta$ for $n = 1, 2, \ldots$ Let δ be the number determined by lemma, and let $\|u\|^* < \delta$, $u \in X_1$ then, denoting by v_1, v_2 elements determined by lemma, we can write $\|V_n(u)\| = \|V_n(v_1 - v_2)\| = \|V_n(v_1) - V_n(v_2)\| \leqslant \|V_n(v_1) - V_n(x_0)\| + \|V_n(x_0) - V_n(v_2)\| \leqslant 2\eta$ and this inequality holds for $n = 1, 2, \ldots$

Let now $x_n \xrightarrow{\gamma} x_0$, we may suppose without loss of generality that $\|x_n\| \leqslant 1$. Since $\|x_n\|^* \to 0$ we see that $\|U_n(x_n)\| < \eta$ for n sufficiently great. The first part of theorem follows then immediately from the second.

From a theorem of my thesis (1) and from theorem 1, it follows:

Theorem 2. *Let* (δ) *be a* (n') *convergence in a* (F) *space* Y, *and let* $\{U_n(x)\}$ *be a sequence of* $(M_\gamma\{X\}, Y_\delta)$ *linear operations* (δ) *convergent to* $U(x)$ *for every* x. *Then* $U(x)$ *is* $(M_\gamma\{X\}, Y_\delta)$ *linear.*

Theorem of condensation of singularities is true for linear operations in $M_\gamma\{X\}$ also. Theorems 14, 15, 16 of the first part remain also valid if we replace the space M_γ by $M_\gamma\{X\}$.

SUR UN PROBLÈME D'INTERPOLATION POUR LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Par Jan G.-Mikusiński, Poznań

Introduction.

Le sujet de ce travail s'est révélé pendant les recherches faites sur l'équation différentielle

(I) $$x^{(n)}+A(t)\,x=0.$$

C'est en 1939 que M. M. Biernacki m'a suggéré une généralisation d'un problème de Sturm et m'a même donné les premières directives. J'ai abordé ce problème avant la guerre, en travaillant ensuite sous la direction de M. T. Ważewski; j'ai continué ces travaux pendant toute la durée de l'occupation allemande, restant en contact avec M. M. Biernacki et profitant de ses conseils précieux.

Pendant mes recherches, plusieurs nouveaux problèmes se sont présentés. Leurs solutions furent retardées pendant des années à cause de certaines difficultés ayant toutes un caractère commun. Je les ramenai, en 1944, à un *problème d'interpolation* qui est une généralisation du problème classique aux limites. La solution de ce problème réussit après avoir introduit des *déterminants combinés*. Cette méthode qui avait été appliquée d'abord à l'équation (I) parut assez générale. En suivant une observation de M. T. Ważewski j'ai pu étendre cette méthode à une classe bien vaste d'équations différentielles (linéaires) en introduisant une variante[1]) d'un théorème de M. E. Kamke[2]).

---

[1]) Voir **3.1**.

[2]) E. Kamke: *Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen II*. Acta Mathematica T. 58, Satz 9, p. 82. Ce théorème, pour être tout à fait strict, nécessite une modification d'hypothèse indiquée par M. Ważewski, cf. T. Ważewski: *Sytèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*. Annales de la Soc. Polon. de Math. T. IX.

Le but principal de ce travail est de préciser le *problème général de l'interpolation* et de décrire la méthode de sa solution au moyen des *déterminants combinés*. C'est ce qui fait le sujet des chapitres 1, 2 et 3. Dans le chapitre 4, je prends en considération quelques propositions qui permettent, dans certains cas, de simplifier la méthode introduite.

Enfin, je considère, dans le chapitre 5, le problème d'interpolation pour un „système cyclique généralisé", cette dénomination étant adoptée pour le système d'équations

$$x_1' = f_{1n}(t)\,x_n + f_{11}(t)\,x_1 + f_{12}(t)\,x_2;$$
$$x_2' = f_{21}(t)\,x_1 + f_{22}(t)\,x_2 + f_{23}(t)\,x_3;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n' = f_{n,n-1}(t)\,x_{n-1} + f_{nn}(t)\,x_n + f_{n1}(t)\,x_1.$$

Ce système est une généralisation du système

$$\text{(II)} \qquad x_1' = f_{12}(t)\,x_2, \dots, \; x_{n-1}' = f_{n-1,n}(t)\,x_n, \; x_n' = f_{n1}(t)\,x_1$$

qui pourrait être appelé „système cyclique".

Le système (II) est plus général que l'équation (I) et peut être ramené à celle-ci par la supposition

$$f_{11}(t) = \dots = f_{n-1,n}(t) \equiv 1, \quad f_{n1}(t) = -A(t);$$

il contient, de même, comme cas particulier, l'équation de Sturm $[P(t)x']' + Q(t)x = 0$ $[P(t) \neq 0]$; en effet, on obtient cette équation de (II), en posant: $n = 2$, $f_{12}(t) = \dfrac{1}{P(t)}$, $f_{21}(t) = -Q(t)$ et en éliminant la variable x_2.

Dans ce travail, j'ai négligé entièrement des problèmes, d'où celui d'interpolation a pris son origine; ces sujets seront traités dans un autre travail. Parmi les problèmes auxquels la méthode en question a pu ex post être attachée, je considère un problème énoncé et en partie résolu, en 1944, par M. M. BIERNACKI [3]).

En terminant cette introduction qu'il me soit permis d'exprimer mes vifs remerciements à M. M. BIERNACKI — dont je suis élève — qui, avec une grande bienveillance, a prodigué ses conseils pendant les six années de l'occupation allemande,

[3]) Les résultats de M. M. Biernacki ne sont pas encore publiés.

à M. T. WAŻEWSKI qui avec une extrême complaisance s'est occupé de moi pendant mon séjour à Kraków et qui souvent, pendant la guerre, a donné de bienveillantes directives et, enfin, à M. F. LEJA dont l'aide précieuse, concernant le sujet et la rédaction de ce travail, m'a été d'un grand secours.

C'est aussi un agréable devoir pour moi d'exprimer ma gratitude à M. W. WRONA qui m'a aidé à faire la revue de la littérature, concernant la théorie des équations différentielles linéaires.

1. Problème d'interpolation.

1.1. Généralités. — L'intégrale générale

(1) $$x_1 = \varphi_1(t), \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

du système d'équations linéaires

(2) $$x_i' = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\, x_j + g_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

dépend de n paramètres arbitraires. En adoptant pour ces paramètres des valeurs convenables, on peut, dans un point fixé $t = a$, donner aux fonctions (1) des valeurs quelconques, choisies à l'avance. C'est ce qui est le théorème classique d'existence pour un système d'équations linéaires. Nous allons chercher, dans quelles conditions il est possible de prescrire, aux fonctions (1), des valeurs arbitraires, simultanément dans r points *différents* $a_1, a_2, \ldots, a_r$. En ne disposant que de n paramètres, nous supposeront que le nombre total des valeurs prescrites soit n. Nous supposerons, par le même, que $r \leqslant n$.

Les n valeurs en question peuvent être disloquées de différentes manières, non seulement par le choix arbitraire des points $a_1, \ldots, a_r$, mais, de plus, on peut prescrire ces valeurs à des différentes fonctions, choisies à volonté parmis (1). On obtient ainsi une grande variété du problème considéré. Par exemple, pour $n = 3$, $r = 2$ on a, entre autres, les cas suivants:

1°: $\varphi_1(a_1) = c_1$, $\varphi_1(a_2) = c_2$, $\varphi_2(a_1) = c_3$;

2°: $\varphi_1(a_1) = c_1$, $\varphi_2(a_2) = c_2$, $\varphi_2(a_2) = c_3$;

3^0: $\varphi_1(a_1)=c_1$, $\varphi_2(a_1)=c_2$, $\varphi_3(a_2)=c_3$;

4^0: $\varphi_1(a_2)=c_1$, $\varphi_2(a_1)=c_2$, $\varphi_3(a_2)=c_3$

et beaucoup d'autres.

Nous préciserons, maintenant, le problème ci-dessus, d'une façon générale.

Soient donnés les r points

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_r,$$

appartenant tous à un intervalle, où l'intégrale (1) existe. Soient données, de plus, r suites

$$(3) \qquad j_{\mu 1}, \ldots, j_{\mu q_\mu} \quad (\mu=1,\ldots,r)$$

des nombres naturels $\leqslant n$. On suppose que dans chaque suite, prise séparément, tous les nombres sont différents, la repétition n'étant pas exclue pour différentes suites. Le nombre total de tous les éléments des suites (3) soit égal à n

$$q_1+\ldots+q_r=n.$$

Soient données, enfin, n valeurs arbitraires

$$c_{11},\ldots,c_{1q_1};\ c_{21},\ldots,c_{2q_2};\ \ldots\ ;\ c_{r1},\ldots,c_{rq_r}.$$

On se demande, s'il existe une intégrale (1) du système (2), satisfaisant aux conditions

$$(4) \qquad \varphi_{j_{\mu\nu}}(a_\mu)=c_{\mu\nu} \quad (\mu=1,\ldots,r;\ \nu=1,\ldots,q_\mu).$$

Le problème qui précède sera dit le *problème général d'interpolation* pour les intégrales d'un système d'équations linéaires.

Au cas $r=2$, le problème d'interpolation se réduit à un problème aux limites et, au cas $r=1$, à un simple problème d'existence.

Remarque. Le problème d'interpolation pourrait être formulé d'une façon beaucoup plus générale, en faisant abstraction des équations différentielles et en partant d'un système quelconque de n fonctions à n paramètres. Or, nous profiterons, dans la suite, d'une manière essentielle, du fait que les fonctions en question constituent une intégrale de (2) et nous verrons que les conditions de la solubilité du problème peuvent être

exprimées par certaines inégalités entre les coefficients du système. C'est pour cela que notre énoncé du problème a déjà été ajusté aux équations considérées.

1.2. Déterminant caractéristique. — Soit

$$x_1 = \Phi_{i1}(t), \dots, \; x_n = \Phi_{in}(t) \quad (i = 1, \dots, n) \tag{5}$$

un système fondamental quelconque d'intégrales du système homogène

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\, x_j \quad (i = 1, \dots, n) \tag{2'}$$

qu'on obtient de (2), en négligeant les termes $g_i(t)$. Alors, l'intégrale cherchée de (2) peut être écrite sous la forme

$$x_\varkappa = \varphi_\varkappa(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_{i\varkappa}(t) + \Psi_\varkappa(t) \qquad (\varkappa = 1, \dots, n), \tag{6}$$

$\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t)$ étant une intégrale particulière de (2), fixée à volonté. Pour trouver les coefficients λ_i, il suffit de résoudre le système de n équations algébriques

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_{ij_{\mu\nu}}(a_\mu) = c_{\mu\nu} - \Psi_{j_{\mu\nu}}(a_\mu) \qquad (\mu = 1, \dots, r;\; \nu = 1, \dots, q_\mu). \tag{7}$$

Le déterminant de ce système a la forme

$$\begin{vmatrix} \Phi_{1j_{11}}(a_1) & \dots & \Phi_{nj_{11}}(a_1) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Phi_{1j_{1q_1}}(a_1) & \dots & \Phi_{nj_{1q_1}}(a_1) \\ \Phi_{1j_{21}}(a_2) & \dots & \Phi_{nj_{21}}(a_2) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Phi_{1j_{2q_2}}(a_2) & \dots & \Phi_{nj_{2q_2}}(a_2) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Phi_{1j_{r1}}(a_r) & \dots & \Phi_{nj_{r1}}(a_r) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Phi_{1j_{rq_r}}(a_r) & \dots & \Phi_{nj_{rq_r}}(a_r) \end{vmatrix}$$

ou, en changeant les lignes en colonnes,

$$W(a_1,\dots,a_r)=\begin{vmatrix}\Phi_{1j_{11}}(a_1)\dots\Phi_{1j_{1q_1}}(a_1)\dots\Phi_{1j_{r1}}(a_r)\dots\Phi_{1j_{rq_r}}(a_r)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \Phi_{nj_{11}}(a_1)\dots\Phi_{nj_{1q_1}}(a_1)\dots\Phi_{nj_{r1}}(a_r)\dots\Phi_{nj_{rq_r}}(a_r)\end{vmatrix},$$

cette dernière forme étant la plus convenable pour les applications prochaines. Le déterminant $W(a_1,\dots,a_r)$ sera dit le *déterminant caractéristique* du problème d'interpolation considéré. S'il est différent de zéro, il existe une, et seulement une, intégrale de (2), satisfaisant aux conditions (4).

1.3. Continuité de la solution. — En mettant en évidence tous les paramètres, l'intégrale (1) de (2) peut s'écrire

$$x_i=\varphi_i(t;\ a_1,\dots,a_\nu;\ c_{11},\dots,c_{1q_1};\dots;\ c_{\nu 1},\dots,c_{\nu q_\nu})\quad (i=1,\dots,n);$$

elle est donc à regarder comme un système de n fonctions à $n+r+1$ variables

$$t;\ a_1,\dots,a_r;\ c_{11},\dots,c_{1q_1};\dots;\ c_{r1},\dots,c_{rq_r}\ ^{*)}.$$

Si les coefficients f_{ij} de (2) et les termes g_i sont continus dans un intervalle $a\leqslant t\leqslant b$ et *si le déterminant* $W(a_1,\dots,a_r)$ *est different de zéro dans un certain point*

(8) $$a_i=a_i^*\quad (a<a_i^*<b\ \ pour\ \ i=1,\dots,r)$$

alors lès fonctions (1) *sont continues par rapport à toutes les variables*

$$t;\ a_1,\dots,a_r;\quad c_{11},\dots,c_{rq_r}$$

dans un domaine

$$D:\begin{cases} a\leqslant t\leqslant b\\ |a_i-a_i^*|<\varepsilon\quad (\varepsilon>0,\ i=1,\dots,r)\\ c_{11},\dots,c_{rq_r}\ \ arbitraires.\end{cases}$$

En effet, la continuité des Φ_{ik} implique celle du déterminant $W(a_1,\dots,a_r)$ qui, par suite, est $\neq 0$ dans un certain

---

*) Cela ne contredit pas à ce que nous avons dit au commencement de **1.1.**, car certains des paramètres $a_1,\dots,a_r$; $c_{11},\dots,c_{rq_r}$ sont apparents. Une circonstance analogue a lieu p. e. au cas des fonctions caractéristiques d'un système d'équations linéaires (v. E. Kamke. Diff.-Gl.Lös.-Meth, u. Lös. 1943, page 35).

voisinage de (8)

$$|a_i - a_i^*| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0,\ i = 1, \ldots, r).$$

Or, dans ce voisinage, les coefficients λ_i s'expriment, en vertu de (7), d'une façon continue par $a_1, \ldots, a_r$ et linéaire par $c_{11}, \ldots, c_{\nu q_\nu}$. Ils sont donc continus dans D. La continuité de φ_i résulte, maintenant, directement de (6).

1.4. Certaine propriété des déterminants caractéristiques. — Si on laisse, dans un problème d'interpolation, toutes les données constantes et qu'on ne fait varier que $a_1, \ldots, a_r$, on peut regarder $W(a_1, \ldots, a_r)$ comme une fonction de r variables $a_1, \ldots, a_r$. Or, cette fonction n'est pas définie univoquement, elle dépend encore du choix du système fondamental (5).

On démontre sans peine que, $W(a_1, \ldots, a_r)$ et $V(a_1, \ldots, a_r)$ étant des déterminants caractéristiques, correspondant à deux systèmes (5) différents, on a identiquement

$$W(a_1, \ldots, a_r) = K \cdot V(a_1, \ldots, a_r) \quad (K \text{ — une constante}).$$

On pourrait exprimer ce fait plus court: *le déterminant caractéristique d'un problème donné est déterminé jusqu'à un facteur constant.*

En effet, si

$$\Phi_{i1}(t), \ldots, \Phi_{in}(t)\,; \quad \Phi'_{i1}(t), \ldots, \Phi'_{in}(t)$$

sont les deux systèmes fondamentales donnés, on peut écrire toujours

$$(9) \qquad \Phi_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{n} k_{i\lambda} \Phi'_{\lambda j} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

le déterminant $|k_{ij}|$ (à termes constants) étant différent de zéro.

En substituant (9) dans $W(a_1, \ldots, a_r)$, on voit que

$$W(a_1, \ldots, a_r) = |k_{ij}| \cdot V(a_1, \ldots, a_r),$$

ce qu'il fallait démontrer *).

*) Cette démonstration est due à MM. F. Leja et T. Ważewski. La première démonstration a été plus longue et moins directe.

1.5. Déterminant caractéristique comme fonction du dernier paramètre. — Dans le paragraphe prédédént, nous avons traité le déterminant $W(a_1,\dots,a_r)$ comme une fonction de r paramètres $a_1,\dots,a_r$. Dans certains cas, il est plus convenable de faire varier seulement l'*un* des paramètres, p. e. le dernier, et de garder constants les autres. Il s'agit alors d'une fonction d'une seule variable $W(t)=W(a_1,\dots,a_{r-1},t)$, donnée sous la forme d'un déterminant, dont les colonnes initiales sont formées en termes constants et les q_ν colonnes dernières en fonctions de t. Le déterminant $W(a_1,\dots,a_{r-1},t)$ est un cas spécial d'une notion plus étendue du „déterminant combiné" dont nous allons parler dans le chapitre qui suit.

2. Déterminants combinés.

2.1. Définition des déterminants combinés. — Soit

$$(1') \qquad x_1=\Phi_{i1}(t),\dots,\ x_n=\Phi_{in}(t) \quad (i=1,\dots,p)$$

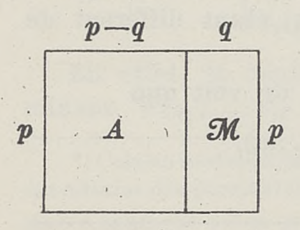
un système de p *intégrales arbitraires* d'un système d'équations différentielles linéaires

$$(2') \qquad x_i'=\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\,x_j \quad (i=1,\dots,n).$$

Désignons par

$$M=(\Phi_{ij}) \quad \begin{pmatrix} i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n \end{pmatrix}$$

la matrice rectanglulaire, correspondant aux intégrales (1'). On tire, de cette matrice, toutes les sous-matrices possibles $\mathcal{M}$ à q ($\leqslant p,n$) colonnes (et à p lignes). On complète chacune de ces $\binom{n}{q}$ sous-matrices à une matrice carrée, en ajoutant du côté gauche une matrice complémentaire A à p lignes et $p-q$ colonnes (figure). On prend, pour les éléments de A des *nombres constants quelconques*; nous convenons, en outre, qu'à chaque matrice $\mathcal{M}$ soit adjointe exactement la même matrice A.



L'ensemble des $\binom{n}{q}$ déterminants, correspondant à ces $\binom{n}{q}$ matrices carrées, sera dit *complet*

de déterminants combinés et ses éléments *déterminants combinés*. Les colonnes du déterminant combiné qui proviennent de la matrice M seront dites *colonnes principales* et celles, formées de nombres constants *colonnes complémentaires*.

Dans le cas particulier $q=p$ $(\leqslant n)$, le déterminant n'est composé que de colonnes principales.

2.2. Équations différentielles des déterminants combinés. — Étant donnés les déterminants, appartenant au même complet, il suffit, pour les discerner les uns des autres, de donner les indices de ces colonnes qui ont été tirées de la matrice M. Si ces indices sont $j_1, \dots, j_q$ $(j_1 < \dots < j_q)$, nous désignerons le déterminant correspondant par

$$|j_1, \dots, j_q|. \tag{10}$$

En substituant pour $j_1, \dots, j_q$ toutes les combinaisons possibles à q éléments des nombres $1, \dots, n$, on peut écrire tous les déterminants du complet considéré.

Nous démontrerons que le complet de déterminants satisfait à un certain système d'équations différentielles linéaires homogènes, dont les coefficients s'expriment d'une façon simple par f_{ij} et ne dépendent que de f_{ij} et des combinaisons $j_1, \dots, j_q$. En particulier, ils ne dépendent pas du tout de la matrice complémentaire A ni du choix des intégrales (1'); ils dépendent cependant de p, mais seulement d'autant que $q \leqslant p$.

Dérivons le déterminant (10) par rapport à t, en effectuant la dérivation selon les colonnes. On obtient ainsi la somme

$$\sum_{l=1}^{q} |j_1, \dots, j_{l-1}, j_l', j_{l+1}, \dots, j_q|, \tag{11}$$

où $|j_1, \dots, j_{l-1}, j_l', j_{l+1}, \dots, j_q|$ est le déterminant, formé de (10) par dérivation de la l-ème colonne. En vertu des relations

$$\Phi_{ij}' = \sum_{k=1}^{n} f_{jk} \Phi_{ik},$$

on peut décomposer chacun des termes de la somme (11) en n nouveaux termes; on obtient ainsi une somme de qn termes

de la forme

(12) $|j_1,\ldots,j_{l-1},(f_{j_l k})k,\ j_{l+1},\ldots,j_q|\quad (l=1,\ldots,q;\ k=1,\ldots,n),$

le dernier symbole désignant le déterminant (10), où la colonne d'indice j_l a été remplacée par celle d'indice k, multipliée par $f_{j_l k}$. Le facteur $f_{j_l k}$ étant le même dans la colonne entière, le déterminant (12) peut s'écrire tout simplement en produit de $f_{j_l k}$ et du déterminant

(13) $$|j_1,\ldots,j_{l-1},\ k,\ j_{l+1},\ldots,j_q|;$$

on peut remarquer ici que le facteur $f_{j_l k}$ dépend de l'indice j_l, se trouvant dans la combinaison $j_1,\ldots,j_q$ et aussi de l'indice k, désignant, ainsi que j_l, une *colonne* de M; cependant, il ne dépend pas du tout des indices des lignes.

Lorsque k est égal à un des nombres $j_1,\ldots,j_{l-1}.\,j_{l+1},\ldots,j_q$, le déterminant (13) disparaît, deux de ses colonnes étant identiques. Lorsque k est différent de tous ces nombres, on arrange les colonnes principales de (13), de manière que leurs indices se suivent dans l'ordre croissant. Le déterminant (13) devient ainsi ramené, à moins de signe, à un des déterminants du complet considéré.

Après ce qui précède, on peut écrire symboliquement

(14) $$|j_1,\ldots,j_q|'=\sum F\cdot W,$$

où le second membre est une somme de déterminants combinés, appartenants au même complet que $|j_1,\ldots,j_q|$, multipliés par des facteurs F, ne dépendant que linéairement de f_{ij}. Après avoir établi les égalités de ce type pour tous les $\binom{n}{q}$ déterminants du complet considéré, on voit qu'ils satisfont à un système d'équations différentielles linéaires homogènes; les coefficients de ce système s'expriment linéairement par des fonctions f_{ij} et ne dépendent ni des colonnes complémentaires ni du choix des fonctions (1').

2.3. Coefficients des équations des déterminants combinés. — Nous nous proposons, maintenant, d'établir la forme

exacte des coefficients F dans l'équation (14). Nous écrivons, dans ce but,

$$|j_1, \ldots, j_q|' = \sum_k F_{j_1 \ldots j_q, k_1 \ldots k_q} \cdot |k_1, \ldots, k_q|,$$

où on doit admettre que la sommation s'étende pour toutes les combinaisons $(k_1, \ldots, k_q)$ à q éléments de $1, \ldots, n$; on n'a qu'à déterminer les fonctions F par rapport aux combinaisons J, K

$$J = (j_1, \ldots, j_q), \quad K = (k_1, \ldots, k_q).$$

Nous supposons, en outre, que $j_1 < \ldots < j_q$; $k_1 < \ldots < k_q$.

Remarquons, tout d'abord, qu'on ne reçoit, par la méthode précédante que des déterminants ayant au plus une colonne différente de celles de $|j_1, \ldots, j_q|$. Il s'en suit que $F_{j_1 \ldots j_q, k_1 \ldots k_q} = 0$, lorsque J et K ont, au moins, 2 éléments différents. Il reste donc a déterminer la forme de F dans les cas, où les combinaisons

1° sont identiques

2° diffèrent entre elles exactement par un seul élément.

Ad 1°: En substituant

$$\Phi'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f_{jk} \Phi_{ik},$$

on obtient, de chaque terme de (11), exactement *un* déterminant $|j_1, \ldots, j_q|$, pourvu du coefficient $f_{j_l j_l}$. On a donc

$$F_{j_1 \ldots j_q, j_1 \ldots j_q} = \sum_{l=1}^{q} f_{j_l j_l}.$$

Ad 2°: Supposons que les éléments, par lesquelles J et K se distinguent, soient j_r et k_s (j appartient à J, k_s à K). Les autres éléments de J et K étant, par supposition, les mêmes, on voit que le déterminant $|k_1, \ldots, k_q|$ ne peut provenir que de celui d'entre (11), où la colonne dérivée a eu l'indice j_r, c'est-à-dire de

$$|j_1, \ldots, j_{r-1}, j'_r, j_{r+1}, \ldots, j_q|.$$

Ce dernier déterminant se décompose, après la substitition

$$\Phi'_{ij_r} = \sum_{k=1}^{n} f_{j_r k} \Phi_{ik},$$

en n déterminants, dont *un seul* contient la colonne d'indice k_s:

$$| j_1, \dots, j_{v-1}, k_s, j_{v+1}, \dots, j_q |;$$

ce déterminant sera multiplié par le coefficient $f_{j_r k_s}$. Il faut encore faire passer la colonne d'indice k_s de la r-ème à la s-ème place, ce qui fait changer $|r-s|$ fois le signe du déterminant. On peut noter ce fait, en multipliant son coefficient par $(-1)^{r+s}$. On a donc finalement

$$F_{j_1 \dots j_q, k_1 \dots k_q} = (-1)^{r+s} f_{j_r k_s}.$$

En mettant ensemble les résultats qui precèdent, on a:

$F_{j_1 \dots j_q, k_1 \dots k_q} = \sum_{l=1}^{q} f_{j_l j_l}$, *lorsque les combinaisons* J *et* K *sont identiques;*

$= (-1)^{r+s} f_{j_r k_s}$, *lorsque* J *et* K *diffèrent d'un seul élément,* J *contenant* j_r *et étant dépourvu de* k_s, K *inversement;*

$= 0$, *lorsque* J *et* K *diffèrent de plus que d'un élément.*

2.4. Exemples. — Considérons, par exemple, un système de 4 équations

$$x'_i = \sum_{j=1}^{4} f_{ij}(t)\, x_j \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

dont la matrice correspondante de coefficients est

$$\big(f_{ij}(t)\big) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{pmatrix}.$$

Nous nous proposons de déterminer la matrice (F) de coefficients d'un système d'équations qui serait satisfait par le complet de déterminants combinés, dans le cas p. e. $q=2$,

$$|1,2|, \quad |1,3|, \quad |2,3|, \quad |1,4|, \quad |2,4|, \quad |3,4|.$$

En suivant les règles du paragraphe précédant, on obtient pour (F)

$$\begin{array}{c} \\ 1,2 \\ 1,3 \\ 2,3 \\ 1,4 \\ 2,4 \\ 3,4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1,2 & 1,3 & 2,3 & 1,4 & 2,4 & 3,4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} f_{11}+f_{22} & f_{23} & -f_{13} & f_{24} & -f_{14} & 0 \\ f_{32} & f_{11}+f_{33} & f_{12} & f_{34} & 0 & -f_{14} \\ -f_{31} & f_{21} & f_{22}+f_{33} & 0 & f_{34} & -f_{24} \\ f_{42} & f_{43} & 0 & f_{11}+f_{44} & f_{12} & f_{13} \\ -f_{41} & 0 & f_{43} & f_{21} & f_{22}+f_{44} & f_{23} \\ 0 & -f_{41} & -f_{42} & f_{31} & f_{32} & f_{33}+f_{44} \end{pmatrix} \end{array}$$

Les nombres à gauche du tableau désignent les combinaisons J, ceux en haut les conbinaisons K.

Si on voulait former une matrice analogue pour un système de 3 équations, il suffirait de tirer de celle ci-dessus la matrice partielle, composée de 9 éléments, formant un carré dans le coin gauche supérieur. De même, en partant d'un système de 2 équations, on obtiendrait une matrice, formée d'un seul élément $f_{11}+f_{22}$ qui se trouve dans le coin gauche supérieur. Pour avoir une matrice (F), correspondant à un système de 5 équations (toujours pour $q=2$), il suffit d'étendre le tableau ci-dessus, en ajoutant 4 lignes et 4 colonnes. On pourrait, de la même manière, étendre ce tableau à volonté, en partant des systèmes d'ordre plus élevé. En pratique, il est le plus aisé d'ajouter d'abord les nouvelles combinaisons à gauche et en haut du tableau [si p. e. $n=5$ il faudrait ajouter encore 1,5; 2,5; 3,5; 4,5] et d'appliquer ensuite la règle de **2.3**.

On peut construire, de la même manière, des matrices (F) pour $q>2$.

En particulier, il faut distinguer deux cas spéciaux: $q=1$ et $q=n$. Dans le premier cas la règle donne pour (F) la matrice identique avec (f_{ij}). Dans le second cas le complet se compose

d'un seul déterminant $|1,\ldots,n|$; la matrice (F) est formée alors aussi d'un seul élément $\sum_{i=1}^{n} f_{ii}$. Nous arrivons ainsi à l'équation bien connue (de Liouville)

$$u' = \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu\nu} u \tag{15}$$

qui est satisfaite, en particulier, par le déterminant de chaque système fondamental des intégrales du système primitif d'équations.

3. Théorème sur la comparaison des intégrales d'un système d'équations et son application au problème d'interpolation.

3.1. Théorème général. — Pour résoudre le problème d'interpolation, il importe peu de connaître la valeur exacte du déterminant charactéristique, il suffit de savoir, si celui est égal ou différent de zéro. Afin de répondre à cette dernière question, il est parfois commode de s'appuyer sur un théorème général qui permet de comparaître deux intégrales d'un système d'équations différentielles.

Théorème [1]). *Soit*

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{16}$$

un système d'équations différentielles, où les fonctions $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$

1° *sont continues pour* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *et pour chaque système de valeurs réelles* $x_1, \ldots, x_n$,

2° *sont non décroissantes par rapport à* $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$,

3° *satisfont à la condition de Lipschitz* [2]).

---

[1]) C'est une variante d'un théorème qui m'a été communiqué oralement par M. T. Ważewski en 1939.

[2]) $|f_i(t, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant K \sum_{j=1}^{n} |\bar{x}_j - x_j| \quad (i = 1, \ldots, n)$. Cette condition pourrait être remplacée par une autre, plus faible, mais cela ne jouerait pas le rôle dans nos considérations prochaines, celles-ci ne concernant que des équations linéaires.

Si les courbes $x_i=\varphi_i(t)$, $x_i=\psi_i(t)$ $(i=1,\dots,n)$ *sont deux intégrales du système* (16), *telles que*

$$\varphi_i(a)\leqslant\psi_i(a)\quad(i=1,\dots,n),$$

alors les inégalités

$$\varphi_i(t)\leqslant\psi_i(t)\quad(i=1,\dots,n)$$

ont lieu dans l'intervalle entier $a\leqslant t\leqslant\beta$.

Si, de plus, on a, pour un point t_0 *de* $[a,\beta]$ *et pour un* $i=i_0$,

$$\varphi_{i_0}(t_0)<\psi_{i_0}(t_0)$$

alors on a constamment

$$\varphi_{i_0}(t)<\psi_{i_0}(t)\quad \textit{pour}\quad t_0\leqslant t\leqslant\beta.$$

Démonstration. Supposons que les fonctions $\psi_i(t,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0;\ i=1,\dots,n)$ satisfassent au système d'équations différentielles

$$x_i'=f_i(t,x_1,\dots,x_n)+\varepsilon\quad(i=1,\dots,n)$$

avec les conditions initiales

$$\psi_i(a,\varepsilon)=\psi_i(a)\quad(i=1,\dots,n).$$

On a alors, dans un voisinage droit de a,

$$\psi_i(t,\varepsilon)>\varphi_i(t)\quad(i=1,\dots,n). \tag{17}$$

Désignons par (a,t_1) le plus grand intervalle, où les inégalités (17) ont lieu. Si $t_1<\beta$, on aurait pour un certain $i=i_1$

$$\psi_{i_1}(t_1,\varepsilon)=\varphi_{i_1}(t_1)$$

et ensuite

$$\psi_{i_1}'(t_1,\varepsilon)=f_{i_1}[t,\psi_1(t_1,\varepsilon),\dots,\psi_n(t_1,\varepsilon)]+\varepsilon>f_{i_1}[t_1,\varphi_1(t_1),\dots,\varphi_n(t_1)]=\varphi_{i_1}'(t_1),$$

ce qui est impossible. Les inégalités (17) ont donc lieu dans l'intervalle entier $a\leqslant t\leqslant\beta$.

Lorsque ε tend vers zéro, les fonctions $\psi_i(t,\varepsilon)$ se confondent avec $\psi_i(t)$ [3]) et les inégalités (17) se transforment en

$$\psi_i(t) \geqslant \varphi_i(t) \quad (i = 1, \dots, n).$$

La première partie du théorème est donc démontrée.

Supposons maintenant que $\varphi_{i_0}(t_0) < \psi_{i_0}(t_0)$ et désignons par t_0, t_1 le plus grand intervalle, contenu dans $[\alpha, \beta]$ [4]), où $\varphi_{i_0}(t) < \psi_{i_0}(t)$. Posons

$$F_1(t, x) = f_{i_0}[t, \psi_1(t), \dots, \psi_{i_0-1}(t), x, \psi_{i_0+1}(t), \dots, \psi_n(t)],$$
$$F_2(t, x) = f_{i_0}[t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_{i_0-1}(t), x, \varphi_{i_0+1}(t), \dots, \varphi_n(t)];$$

en vertu des prémisses quant à f_i, on a

(18) $$F_1(t, x) \geqslant F_2(t, x) \quad \text{dans l'intervalle } t_0, t_1.$$

Les fonctions $\varphi_{i_0}(t)$ et $\psi_{i_0}(t)$ satisfont aux équations différentielles

(19) $$\psi'_{i_0}(t) = F_1[t, \psi_{i_0}(t)], \quad \varphi'_{i_0}(t) = F_2[t; \varphi_{i_0}(t)].$$

Si $t_1 < \beta$, on aurait, en vertu de la continuité des fonctions considérées, $\varphi_{i_0}(t_1) = \psi_{i_0}(t_1)$ et, en tenant compte de (18) et (19), $\psi'_{i_0}(t_1) \geqslant \varphi'_{i_0}(t_1)$. En vertu de la condition de Lipschitz qui a été supposée, l'unicité des intégrales a lieu aussi pour les équations (19). On aurait par conséquent $\varphi_{i_0}(t) \geqslant \psi_{i_0}(t)$ [5]) à gauche de x_1, ce qui n'est pas compatible avec la définition de l'intervalle t_0, t_1. On a donc, forcément, $t_1 = \beta$ et la seconde partie du théorème est aussi démontrée.

---

[3]) En vertu du théorème sur la continuité des solutions des équations différentielles par rapport aux paramètres. Voir p. e. E. Kamke: *Diff.-Gleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930, p. 145, Satz. 1. En appliquant le théorème de Kamke, il faut s'assurer d'abord, si les fonctions ψ_i sont définies univoquement par leurs valeurs initiales dans le point $t=\alpha$. En effet, cela est une conséquence de la condition de Lipschitz que nous avons supposée.

[4]) En écrivant t_0, t_1, nous ne voulons pas préjuger, si l'intervalle est fermé ou non; deux cas peuvent se présenter ici: $t_0, t_1 = [t_0, t_1)$ pour $t_1 > \beta$ ou $t_0, t_1 = [t_0, t_1]$ pour $t_1 = \beta$, les signes [,],) étant employés, comme d'habitude, pour distinguer les intervalles fermés et ouverts.

[5]) Voir E. Kamke, cité sous [3]), page 91.

3.2. Théorème sur un système linéaire.

Théorème. *Soit*

$$u_i' = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(t)\, u_j \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{20}$$

un système d'équations dont les coefficients F_{ij} sont continus dans un intervalle $[\alpha, \beta]$ et, pour $i \neq j$, non négatifs. Si

$$u_1 = \psi_1(t), \ldots, \; u_m = \psi_m(t) \tag{21}$$

est une intégrale de (20), *telle que*

$$\psi_i(\alpha) \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, m),$$

alors toutes les fonctions $\psi_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ sont non négatives dans $[\alpha, \beta]$; si, de plus, l'une quelconque parmi elles est positive dans un certain point de $[\alpha, \beta]$, elle le demeure jusqu'à la fin cet intervalle.

Ce théorème se déduit sans peine du théorème précédent.

Dans les paragraphes suivants il sera commode d'employer la dénomination du *système positif* pour tout système d'équations linéaires dont les coefficients sont, à moins de diagonale principale, non négatifs.

3.3. Exemples des applications aux problèmes d'interpolation.

Exemple 1. Soit

$$\left\{ \begin{aligned} x_1' &= f_{11} x_1 + f_{12} x_2 + f_{13} x_3, \\ x_2' &= f_{21} x_1 + f_{22} x_2 + f_{23} x_3, \\ x_3' &= f_{31} x_1 + f_{32} x_2 + f_{33} x_3 \end{aligned} \right. \tag{22}$$

un système d'équations, dont les coefficients sont des fonctions de t, continues dans un intervalle $[a_1, a_2]$. On cherche des conditions suffisantes pour existence d'une intégrale de (22)

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad x_3 = \varphi_3(t),$$

telle que

$$\varphi_3(a_1) = c_1, \quad \varphi_1(a_2) = c_2, \quad \varphi_2(a_2) = c_3,$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes, données à l'avance.

Le déterminant caractéristique de ce problème est

$$W(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} \Phi_{13}(a_1) & \Phi_{11}(a_2) & \Phi_{12}(a_2) \\ \Phi_{23}(a_1) & \Phi_{21}(a_2) & \Phi_{22}(a_2) \\ \Phi_{33}(a_1) & \Phi_{31}(a_2) & \Phi_{32}(a_2) \end{vmatrix}.$$

Nous considérons un complet de déterminants combinés, dont l'un des éléments est $W(a_1, t)$:

$$u_1 = |1,2|, \quad u_2 = |1,3|, \quad u_3 = |2,3|;$$

en appliquant les notations de **2.2.**, on a $u_1 = W(a_1, t)$. Le complet en question satisfait au système d'équations

$$(23) \qquad \begin{cases} u_1' = (f_{11}+f_{22})\,u_1 + f_{23}\,u_2 - f_{13}\,u_3, \\ u_2' = f_{32}\,u_1 + (f_{11}+f_{33})\,u_2 + f_{12}\,u_3, \\ u_3' = -f_{31}\,u_1 + f_{21}\,u_2 + (f_{22}+f_{33})\,u_3. \end{cases}$$

Si on suppose dans $[a_1, a_2]$

$$(24) \qquad \begin{cases} f_{12}, \quad f_{21}, \quad f_{23}, \quad f_{32} \geqslant 0, \\ \qquad f_{13}, \quad f_{31} \leqslant 0, \end{cases}$$

alors le système (23) sera positif et on pourra lui appliquer le théorème de **3.2.** Il faut encore examiner les conditions initiales dans le point $t = a_1$. Or, la fonction u_1 s'y confond avec le déterminant $|\Phi_{ij}(t)|$, et les fonctions u_2, u_3 s'annulent. En choisissant un système fondamental d'intégrales de (22) tel que le déterminant $|\Phi_{ij}(t)|$ soit positif (ce qui est toujours possible), on aura $u_1(a_1) > 0$ et le même signe sera conservé dans l'intervalle entier $[a_1, a]$; en particulier, on aura $u_1(a_2) = W(a_1, a_2) > 0$. Il s'en suit que les inégalités (24) sont une condition suffisante pour l'existance d'une intégrale (22) avec les propriétés proposées.

Exemple 2: On considère le même système (22), mais on veut que son intégrale satisfasse aux conditions

$$\varphi_1(a_1) = c_1, \quad \varphi_1(a_2) = c_2, \quad \varphi_2(a_2) = c_3.$$

Le déterminant caractéristique a maintenant la forme

$$(25) \qquad W(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(a_1) & \Phi_{11}(a_2) & \Phi_{12}(a_2) \\ \Phi_{21}(a_1) & \Phi_{21}(a_2) & \Phi_{22}(a_2) \\ \Phi_{31}(a_1) & \Phi_{31}(a_2) & \Phi_{32}(a_2) \end{vmatrix}.$$

Le complet correspondant

(26) $u_1 = |1,2|$ $\{= W(a_1, t)\}$, $u_2 = |1,3|$, $u_3 = |2,3|$

satisfait au même système (23). Or, les conditions (24) ne sont plus suffisantes, parce que $u_1(a_1) = 0$. C'est seulement après avoir ajouté une condition suplémentaire, p. e. $f_{13}(\xi) \neq 0$ $(\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta)$, qu'on peut affirmer que $u_1(a_2) = W(a_1, a_2) \neq 0$ et, ce qui s'en suit, que l'intégrale cherchée existe. En effet, on a maintenant

$$u_1(a_1) = 0, \quad u_2(a_2) = 0, \quad u_3(a_1) = |\Phi_{ij}(a_1)|;$$

on peut supposer que $u_3(a_1) > 0$. Alors, en vertu du théorème de **3.2.**, on a $u_3 > 0$ dans l'intervalle entier $[a_1, a_2]$; lorsque $f_{13}(\xi) < 0$, on a $u_1(\xi) > 0$. En effet, si on avait $u_1(\xi) = 0$ [l'éventualité $u_1(\xi) < 0$ est excluse par la première partie du théorème de **3.2.**], on aurait en vertu de la première des équations (23), $u_1'(\xi) > 0$ et la fonction u_1 serait négative dans un voisinnage gauche de ξ, ce qui est impossible. Donc $u_1(\xi) > 0$ et en conséquence $u_1(a_2) > 0$.

Exemple 3. On suppose que $a_1 < a_2 < a_3$ et que les coefficients f_{ij} du système (22) sont continus dans l'intervalle $[a_1, a_3]$. On cherche des conditions (suffisantes) pour l'existence d'une intégrale de ce système, telle que

$$\varphi_1(a_1) = c_1, \quad \varphi_1(a_2) = c_2, \quad \varphi_1(a_3) = c_3.$$

Le déterminant caractéristique, pour le présent problème, est

$$W(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(a_1) & \Phi_{11}(a_2) & \Phi_{11}(a_3) \\ \Phi_{21}(a_1) & \Phi_{21}(a_2) & \Phi_{21}(a_3) \\ \Phi_{31}(a_1) & \Phi_{31}(a_2) & \Phi_{31}(a_3) \end{vmatrix}.$$

Le complet correspondant

$$v_1 = |1| \quad \{= W(a_1, a_2, t)\}, \quad v_2 = |2|, \quad v_3 = |3|$$

satisfait au système (22). Pour appliquer le théorème de **3.2.**, il faut supposer que tous les f_{ij}, où $i \neq j$, soient non négatifs dans $[a_2, a_3]$; les conditions initiales qui importent sont celles du point $t = a_2$. On a ici

$$v_1(a_2) = 0, \quad v_2(a_2) = u_1(a_2), \quad v_3(a_2) = u_2(a_2),$$

où $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont des déterminants du complet (26), adjoint à (25). Supposons, pour moment, que $u_1(a_2) \geqslant 0$ et $u_2(a_2) > 0$. On a alors, sûrement, $u_3(t) > 0$ dans $[a_2, a_3]$. Lorsque $f_{23}(\xi) > 0$ dans un point ξ au moins à l'intérieur de $[a_2, a_3]$, on peut démontrer d'une manière analogue à la précédente, en s'appuyant sur la seconde des équations (22), que $v_2(\xi) > 0$. Lorsque, de plus, $f_{12}(\xi) > 0$, on obtient de même, en vertu de la seconde équation (22), $v_1(\xi) > 0$ et, par suite, $v_1(a_3) = W(a_1, a_2, a_3) > 0$.

C'est ainsi que le problème se ramène à démontrer que $u_1(a_2) \geqslant 0$ et $u_2(a_2) > 0$. Or, ces inégalités n'étant que des variantes des exemples 1 et 2, il est aisé de les obtenir, en supposant que les inégalités (24) soient satisfaites dans $[a_1, a_2]$ et que $f_{12} > 0$ au moins dans un point de cet intervalle. En mettant ensemble toutes les suppositions précédantes quant à f_{ij}, on a, finalement, la réponse suivante:

Le problème considéré d'interpolation a exactement une solution, lorsque

$$f_{12}, f_{21}, f_{23}, f_{32} \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad a_1 \leqslant t \leqslant a_3,$$

$$f_{13}, f_{31} \begin{cases} \geqslant 0 & \text{pour} \quad a_1 \leqslant t \leqslant a_2 \\ \leqslant 0 & \text{pour} \quad a_2 \leqslant t \leqslant a_3 \end{cases}$$

et lorsqu'il existent des nombres $\xi_1 (a_1 < \xi_1 < a_2)$ et $\xi_2 (a_2 < \xi_2 < a_3)$ tels que $f_{12}(\xi_1) > 0$, $f_{12}(\xi_2) > 0$ et $f_{23}(\xi_2) > 0$.

Remarque 1. Il faut encore une fois souligner le fait que les conditions, obtenues dans les exemples précedentes, sont suffisantes, mais non pas nécessaires. Dans ce qui suit, nous donnerons un moyen pour obtenir d'autres conditions suffisantes.

Remarque 2. Le problème d'intérpolation peut être, résolu, au cas $n=3$, $r=2$, par une méthode plus spéciale, sans qu'on introduise la théorie des déterminants combinés. Les exemples 1 et 2 n'ont eu pour le but que d'illustrer la méthode générale sur les cas très simples.

3.4. Encore un exemple. — Pour qu'un problème d'interpolation soit résoluble, il n'est pas nécessaire que le déterminant caractéristique correspondant soit positif, il suffit qu'il ne soit

pas nul. Cela nous permet d'introduire une modification de la méthode, ce que nous illustrerons sur l'exemple suivant :

Exemple 4. On considère le système d'équations

$$\text{(27)} \qquad \begin{cases} x_1' = x_2 + x_3, \\ x_2' = x_1 - x_3, \\ x_3' = x_1 - x_2. \end{cases}$$

On se demande, s'il existe une intégrale de (27)

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad x_3 = \varphi_3(t),$$

telle que

$$\varphi_3(a_1) = c_1, \quad \varphi_1(a_2) = c_2, \quad \varphi_2(a_2) = c_3 \qquad (a_1 < a_2).$$

Ce problème est un cas particulier de l'exemple 1 que nous avons considéré dans **3.3**. Comme nous l'avons déjà remarqué, les inégalités (24) sont *suffisantes* pour que l'intégrale proposée existe, mais elles ne sont pas nécessaires. Les inégalités (14) n'étant pas satisfaites dans le cas présent, la solution obtenue dans le paragraphe précédent ne donne de réponse ni affirmative ni négative. Or, on peut ramener, sans peine, le système (23) qui a maintenant la forme

$$\begin{aligned} u_1' &= -u_2 - u_3, \\ u_2' &= -u_1 + u_3, \\ u_3' &= -u_1 + u_2, \end{aligned}$$

à un système positif. En effet, en introduisant la transformation

$$u_1 = -\bar{u}_1, \quad u_2 = \bar{u}_2, \quad u_3 = \bar{u}_3,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \bar{u}_1' &= \bar{u}_2 + \bar{u}_3, \\ \bar{u}_2' &= \bar{u}_1 + \bar{u}_3, \\ \bar{u}_3' &= \bar{u}_1 + \bar{u}_2; \end{aligned}$$

d'où, de même que dans l'exemple 1, on trouve $\bar{u}_1(x_2) > 0$. Cela veut dire que le déterminant caractéristique $W(a_1, a_2) = u_1(a_2)$ est maintenant négatif, ce qui assure l'existence de l'intégrale cherchée.

3.5. Transformation T et congruence des conditions initiales. — Le dernier exemple démontre qu'il est possible,

parfois, de ramener un système non positif à un système positif. Or, pour qu'on puisse appliquer le théorème de **3.2.**, il faut encore que toutes les fonctions, constituant l'intégrale considérée de (20), soient, après la transformation, non négatives pour $t = a$.

Supposons que cette intégrale satisfasse (avant la transformation) aux conditions initiales

$$\psi_i(a) = c_i \quad (i = 1, \dots, m). \tag{28}$$

Divisons les indices i de la suite (28), en 3 catégories; ceux de la première catégorie seront representés par la lettre μ, ceux de la deuxième par ν, ceux de la troisième par λ. La division en catégories est appuyée sur les relations

$$c_\mu > 0, \quad c_\nu = 0, \quad c_\lambda < 0.$$

Désignons, en général, par $T(i_1, \dots, i_p)$ $(p \leqslant m)$ la transformation

$$\begin{aligned} \overline{u}_i &= -u_1 && \text{pour} \quad i = i_1, \dots, i_p; \\ \overline{u}_i &= u_i && \text{pour} \quad i \neq i_1, \dots, i_p; \end{aligned}$$

en effectuant cette transformation sur le système (20) et sur son intégrale (21) il vient

$$\overline{u}_i' = \sum_{j=1}^{m} \overline{F}_{ij}(t)\, \overline{u}_{ij} \quad (i = 1, \dots, m), \tag{29}$$

$$\overline{u}_1 = \overline{\psi}_1(t), \dots, \quad \overline{u}_m = \overline{\psi}_m(t). \tag{30}$$

Pour qu'on puisse appliquer, au système (29) et à son intégrale (30), le théorème de **3.2.**, la transformation $T(i_1, \dots, i_p)$ doit être choisie de la sorte que

$$\overline{\psi}_i(a) \geqslant 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

c'est-à-dire:

A $\left\{\right.$ *la suite $i_1, \dots, i_p$ doit contenir tous les indices λ et ne peut contenir aucun des indices μ.*

(La question, si cette suite contient ou non les indices ν, ne joue aucun rôle).

S'il est possible de trouver une transformation T telle que la condition A soit satisfaite et que le système transformé soit positif, alors les conditions initiales (28) seront dites *congruentes* avec le système donné (20). Lorsque cette congruence a lieu, on peut affirmer, en vertu du théorème de **2.3.**, que les fonctions (30) sont non négatives dans $[\alpha, \beta]$; de plus, si l'une quelconque parmi elles est positive dans un certain point de cet intervalle, elle le reste jusqu'à son extremité droite. Les fonctions $\psi_i(t)$ sont, à signe près, les mêmes que $\overline{\psi}_i(t)$, donc chacune des $\psi_i(t)$ jouit des 2 propriétés suivantes:

1º $\psi(t)$ consèrve son signe dans $[\alpha, \beta]$, c'est-à-dire on a constamment $\psi(t) \geqslant 0$ ou bien $\psi(t) \leqslant 0$;

2º lorsque $\psi(t_0) \neq 0$ pour un certain point $t = t_0$ de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, on a aussi $\psi(t) \neq 0$ pour $t_0 \leqslant t \leqslant \beta$.

Chaque fonction ψ, possédant les 2 propriétés ci-dessus, sera dite *fonction conservatrice* dans $[\alpha, \beta]$.

En profitant des définitions introduites, on peut résumer les résultats de ce paragraphe dans la proposition:

Si les conditions initiales de l'inégrale

(31) $$\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t),$$

rattachées au point initial de l'intervalle considéré, sont congruentes avec le système (20), *alors toutes les fonctions* (31) *sont conservatrices dans cet intervalle.*

3.6. Remarques pratiques. — Nous montrerons maintenant, par quelques exemples, comment on peut vérifier, au point de vue pratique, la congruence des conditions initiales. Soit donné un système (20) (pour $m = 6$), dont la matrice de coefficients a la forme

(32) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & -4 \\ -9 & -1 & -2 & 1 & -3 & -1 \\ 4 & 7 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(pour plus de clarté nous avons supposé les coefficients constants).

On se propose de vérifier, si les conditions initiales

$$c_1 = c_3 = c_4 = c_6 = 0, \quad c_2 < 0, \quad c_5 > 0$$

sont congruentes avec le système donné.

On a ici les indices μ: 5;
ν: 1, 3, 4, 6;
λ: 2.

Nous effectuons d'abord la transformation $T(i_1, \dots, i_p)$ qui contient tous les indices λ et seulement ceux, dans notre cas: $T(2)$. Le tableau (32) se transforme par $T(2)$ en un tableau nouveau, où il suffit de marquer les signes $+$ et $-$ (en négligeant la diagonale principale qui, dans notre problème, ne joue aucun rôle) (tableau 33):

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} * & - & + & - & 0 & + \\ 0 & * & - & + & + & - \\ \cline{1-2} 0 & - & * & 0 & - & + \\ - & + & - & * & + & - \\ - & + & - & + & * & - \\ + & - & + & - & 0 & * \end{array}\right)$$

Tableau (33).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} * & + & - & + & 0 & + \\ 0 & * & - & + & + & - \\ 0 & - & * & 0 & - & + \\ \cline{1-3} + & + & - & * & + & - \\ + & + & - & + & * & - \\ - & - & + & - & 0 & * \end{array}\right)$$

Tableau (34).

$$\left(\begin{array}{cccccc} * & + & + & + & 0 & - \\ 0 & * & + & + & + & - \\ 0 & + & * & 0 & + & - \\ + & + & + & * & + & - \\ + & + & + & + & * & - \\ - & - & - & - & 0 & * \end{array}\right)$$

Tableau (35).

$$\left(\begin{array}{cccccc} * & + & + & + & 0 & + \\ 0 & * & + & + & + & + \\ 0 & + & * & 0 & + & + \\ + & + & + & * & + & + \\ + & + & + & + & * & + \\ + & + & + & + & 0 & * \end{array}\right)$$

Tableau (36).

Ensuite, en disposant seulement des indices ν, dans notre cas des 1, 3, 4, 6, nous opérons, tout d'abord de la sorte que les signes dans le carré gauche supérieur K_2 (marqué sur le tableau 33) deviennent non négatifs. Or, cela réussit par la transformation $T(1)$ qui transforme (33) en (34). Ensuite, en disposant toujours des indices ν, nous ramenons aux signes non négatifs le carré K_3, formé de 9 éléments et situé au coin gauche supérieur (marqué sur le tableau 34); nous appliquons, dans ce but, la

transformation (3) qui nous conduit au tableau (35). En passant au carré K_4 qu'on obtient de K_3, en ajoutant une ligne et une colonne nouvelles, on voit que K_4 ne contient que des signes non négatifs. Il en est de même du carré K_5. Il reste encore le carré K_6 (le dernier) dont certains éléments sont négatifs. Nous le ramenons aux signes non négatifs par la transformation $T(6)$. Nous sommes arrivés ainsi au tableau (36), dont tous les élément sont déjà non négatifs.

Il est clair que l'application successive de toutes les transformations qui précèdent équivaut à une seule transformation $T(2, 1, 3, 6)$, satisfaisant la condition A de **3.5**. Les conditions de notre exemple sont donc congruentes avec le système d'équations donné.

Or, ce n'est pas toujours qu'on peut transformer un système donné en un système positif. P. e. celui, dont le tableau de signes est

$$\begin{pmatrix} * & - & 0 & - \\ 0 & * & - & 0 \\ - & 0 & * & - \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}$$

ne peut pas être transformé en un système positif, même si nous admettions, pour les transformations, tous les indices 1, 2, 3, 4. En effet, en appliquant p. e. la transformation $T(1)$, on obtient le tableau

$$\begin{pmatrix} * & + & 0 & + \\ 0 & * & - & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}$$

où le carré K_2 est non négatif. Le carré K_3 contient encore un élément négatif qui ne peut pas être chassé par la transformation $T(3)$.

3.7. Variables liées. — Dans des applications, il ne suffit pas, en général, de constater que les fonctions $\psi_i(t)$ soient conservatrices (v. **3.5**), il faut plutôt démontrer qu'elles soient *différentes de zéro* pour certaines valeurs de t. Nous en avons

donné des exemples dans **3.3.** Les recherches peuvent être simplifiées, dans certains cas, par l'introduction de la notion des *variables liées*.

Définition. Une variable u_r du système (20) sera dite *liée dans un point* ξ avec une autre variable u_q du même systeme (20) [6]), lorsqu'il existe une suite d'indices

(37) $$i_0, i_1, \dots, i_s \quad (i_0 = q,\ i_s = r),$$

telle que toutes les fonctions

$$F_{i_\sigma i_{\sigma-1}}(t) \quad (\sigma = 1, \dots, s)$$

soient différentes de zéro pour $t = \xi$.

Supposons que l'intégrale

(38) $$\psi_1(t), \dots, \psi_m(t)$$

du système (20) satisfasse, pour $t = a$, aux conditions initiales qui sont congruentes avec (20). Soit l'une des fonctions (38) p. e. $\psi_q(t)$ différente de zéro pour $t = a$; cette fonction est par le même différente de zéro dans l'intervalle $[a, \beta]$ entier. On démontre sans peine que *si une fonction* $\psi_r(t)$ *parmi* (35) *est liée avec* $\psi_q(t)$ *(ça veut dire si la variable* u_r *est liée avec* u_q*) dans un point* $\xi\,(a < \xi \leqslant \beta)$, *alors on a* $\psi_r(t) \neq 0$ *pour* $\xi \leqslant t \leqslant \beta$.

Il suffit de démontrer la proposition dans le cas, où le système (20) est positif et les conditions initiales sont non négatives. Alors toutes les fonctions (38) sont non négatives et $\psi_q(t)$ est positive dans $[a, \beta]$. Supposons que la fonction $\psi_r(t)$ est liée avec $\psi_q(t)$ par la suite d'indices (37). Alors, en vertu de

$$\psi'_{i_1}(t) = \sum_{j=1}^{m} F_{i_1 j}(t)\, \psi_j(t),$$

on a (d'une manière analogue à celle de l'exemple 2 de **3.3.**) $\psi_{i_1}(\xi) > 0$. En effet, s'il était $\xi_{i_1}(\xi) = 0$, on aurait, en vertu de $F_{i_1 q}(\xi)\,\psi_q(\xi) > 0$, $\psi'_{i_1}(\xi) > 0$ et la fonction $\psi_{i_1}(t)$ serait négative dans un voisinnage gauche de ξ, ce qui est impossible.

[6]) Nous définissons ici une relation assymétrique.

De même, en s'appuyant sur l'inégalité déjà établie $\psi_{i_1}(\xi)>0$, on tire de

$$\psi'_{i_2}(t)=\sum_{j=1}^{m} F_{i_2 j}(t)\,\psi_j(t)$$

que $\psi_{i_2}(\xi)>0$; on voit par induction qu'on aura aussi $\psi_r(\xi)>0$, c. q. f. d.

3.8. Récapitulation et compléments. — Il n'est pas difficile de tirer, des paragraphes précédents et des exemples y contenus, l'idée dominante dans les recherches sur la solubilité du problème d'interpolation à l'aide des déterminants combinés. Nous esquisserons ici, en quelques traits, la méthode générale. Nous adoptons les notations de **1.1.** et **1.2.**

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution unique d'un problème d'interpolation (**1.1.**) est ce que le déterminant caractéristique (**1.2.**) correspondant

$$W(a_1, \ldots, a_r) \tag{39}$$

soit différent de zéro.

Pour examiner ce déterminant, nous considérons une suite de r déterminants combinés (**2.1.**)

$$W_1(t), \ldots, W_r(t), \tag{40}$$

formés de la manière suivante. Le déterminant $W_1(t)$ n'a pas de colonnes complémentaires et est identique avec celui du système fondamental d'intégrales. Le déterminant $W_\mu(t)$ $(\mu=2,\ldots,r)$ possède $q_1+\ldots+q_{\mu-1}$ colonnes complémentaires et $q_\mu+\ldots+q_r$ colonnes principales (**1.1.** et **2.1.**). Les colonnes complémentaires de $W_\mu(t)$ sont identiques avec les colonnes initiales de $W(a_1,\ldots,a_r)$. Les indices des colonnes principales peuvent être établies arbitrairement, pourvu qu'ils contiennent tous les indices $j_{\mu 1}\ldots j_{\mu q_\mu}$ [**1.1.**, (3)].

Nous considérons ensuite les complets

$$K_1, \ldots, K_r$$

de déterminants combinés (**2.1.**), contenants relativement les déterminants (40), et, en même temps, les systèmes d'équa-

tions différentielles (**2.2.**)

$$U_1, \dots, U_r$$

qui sont satisfaits par ces complets. Le complet K_1 ne contient qu'un seul déterminant $W_1(t)$. Celui possède seulement des colonnes principales et, comme déterminant d'un système fondamental d'intégrales, il est constamment différent de zéro. On a donc, en particulier,

$$W_1(a_1) \neq 0;$$

le signe de $W_1(a_1)$ ne dépend que du choix du système fondamental et peut être établi arbitrairement.

Le complet K_2 contient $\binom{n}{q_2 + \dots + q_r}$ déterminants; il y en a un, désignons le par $W_2^*(t)$, qui, en faisant l'abstraction de l'ordre des colonnes, se confond, pour $t = a_1$, avec $W_1(t)$; on a donc $W_2^*(a_1) \neq 0$. Le signe peut être déterminé aisément, en comparant l'ordre des colonnes de $W_1(t)$ et $W_2^*(t)$. Tout les autres déterminants du complet K_2 s'annulent pour $t = a_1$, deux colonnes au moins devenant identiques. Les conditions initiales sont ainsi, pour le complet K_2 déterminées univoquement dans le point $t = a_1$. Si ces conditions sont congruentes (**3.5.**) avec le système U_2 dans $[a_1, a_2]$, alors tous les déterminants du complet considéré sont des fonctions conservatrices (**3.5.**) dans $[a_1, a_2]$ et on peut déterminer leurs signes $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$. En outre, en vertu de $W_2^*(a_1) \neq 0$, on a constamment $W_2^*(t) \neq 0$ dans $[a_1, a_2]$. Lorsque, dans un point $\xi (a_1 < \xi \leqslant a_2)$, la fonction $W_2(t)$ est liée (**3.7.**) avec $W_2^*(t)$, on a $W_2(t) \neq 0$ pour $\xi \leqslant t \leqslant a_2$ et, en particulier

$$W_2(a_2) \neq 0.$$

D'une manière générale, en connaissant, dans le point $t = a_i$, des inégalités $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$ pour les déterminants du complet K_i, on en peut déduire les inégalités analogues pour K_{i+1} dans le point $t = a_{i+1}$; et, de même, de

$$W_i(a_i) \neq 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant r-1)$$

on peut tirer $W_{i+1}(a_{i+1}) \neq 0$, pourvu que certaines conditions soient satisfaites. Notamment, pour $t = a_i$, chaque déterminant

du complet K_{i+1} s'annule ou se confond, l'ordre des colonnes étant négligé, avec un déterminant de K_i. Dans le dernier cas, on peut, en tenant compte de l'ordre des colonnes, de déterminer son signe $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$ au point $t=a_i$ (en supposant que les inégalités analogues soient déjà connues pour les déterminants du complet K_i). Si maintenant les conditions initiales de K_{i+1} pour $t=a_i$ paraissent congruentes avec U_{i+1} dans $[a_i, a_{i+1}]$, les déterminants de K_{i+1} seront des fonctions conservatrices dans $[a_i, a_{i+1}]$ et on pourra déterminer pour chacun d'eux, des inégalités $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$ au point $t=a_{i+1}$. En particulier, il y a exactement l'*un* parmi les déterminants de K_{i+1}, désignons le par $W^*_{i+1}(t)$, qui se confond (en négligeant l'ordre des colonnes), avec $W_i(t)$ pour $t=a_i$; comme $W_i(a_i)\neq 0$, on a constamment $W^*_{i+1}(t)\neq 0$ dans $[a_i, a_{i+1}]$. Lorsque dans un point $\xi\,(a_i<\xi\leqslant a_{i+1})$ le déterminant $W_{i+1}(t)$ est lié avec $W^*_{i+1}(t)$, on a $W_{i+1}(t)\neq 0$ pour $\xi\leqslant t\leqslant a_{i+1}$ et, en particulier,

$$W_{i+1}(a_{i+1})\neq 0.$$

En procédant pas à pas, on peut, dans des circonstances favorables [7]), démontrer consécutivement que tous les déterminants $W_1(a_1),\ldots,W_r(a_r)$ sont différents de zéro. Le dernier d'eux est le déterminant caractéristique (39)

$$W_r(a_r)=W(a_1,\ldots,a_r)\neq 0.$$

4. Systèmes connexes.

4.1. Notion de connexité d'un système. — Nous introduirons maintenant une notion très commode dans les recherches sur les déterminants combinés.

Nous dirons que le système d'équations différentielles

$$(2')\qquad x_i'=\sum_{j=1}^{m} f_{ij}(t)\,x_j\quad (i=1,\ldots,n)$$

est *connexe* dans un point ξ, si chaque variable x_i est liée, dans ξ, avec chaque autre variable x_j de ce système.

---

[7]) Nous pouvons influencer ces circonstances par un choix convenable de la suite (40) qui est, jusqu'à un certain degré, arbitraire.

Une condition nécessaire et suffisante pour la connexité de (2') est l'existence d'un cycle

$$(41) \qquad i_1, \dots, i_p \quad (p+1 \to 1)\text{[1]},$$

contenant tous les nombres $1, \dots, n$ et seulement ceux; tel que

$$f_{i_{\pi+1} i_\pi}(\xi) \neq 0 \quad \text{pour} \quad \pi = 1, \dots, p.$$

Il n'est pas, du reste, exclus que maints éléments se repètent dans (41).

La nécessité ainsi que la suffisance de la condition deviennent évidentes, si on regarde la définition des variables liées.

L'introduction de la notion de connexité est commode parce que *la connexité d'un système donné* (2') *se transfère automatiquement à tous les systèmes d'équations des déterminants combinés, issus de* (2'). Pour démontrer cette proposition, nous nous servirons d'un lemme de combinatorique.

4.2. Un lemme de combinatorique. — Soit

$$(42) \qquad e_1, \dots, e_p \quad (p+1 \to 1)$$

un *cycle* d'éléments quelconques, la repétition des élements n'étant pas exclue; le nombre d'éléments différents soit n.

On construit, des éléments du cycle (42), un ensemble $Z_r (r < n)$ de toutes les combinaisons possibles, contenants chacune r éléments *différents*. On fait abstraction, dans les combinaisons particulières, de l'ordre des éléments.

On définit des opérations O qui transforment des combinaisons de l'ensémble Z_r en autres (ou les mêmes) combinaisons *du même ensemble* Z_r. On se limite à des opérations dont chacune change *un seul* élément e de la combinaison en un autre élément e^*, tel qu'on puisse trouver tous les deux, e et e^*, comme éléments *voisins* dans le cycle (42), le second suivant le premier.

---

[1]) Le symbole $p+1 \to 1$ veut dire que l'indice $p+1$ doit être remplacé, dans toutes les relations, où il paraît, par 1. C'est pour cette raison que le système $Q_1, \dots, Q_p$ est dit un cycle et non plus une suite.

Lemme. *Chaque combinaison de l'ensemble Z_r peut être transformée, par une suite convenable (finie) d'opérations O, en chaque autre combinaison du même ensemble.*

La difficulté de la démonstration de ce lemme consiste en ce qu'il est impossible, en général, de remplecer tout simplement un élément donné par les éléments qui le suivent, dans (42), et de continuer cela jusqu'à ce qu'on arrive à l'élément convenable. On pourrait ainsi obtenir, en passant, des combinaisons aux éléments répétés qui n'appartiennent plus à Z_r. Il faut plutôt opérer avec les O de manière à obtenir toujours des combinaisons aux éléments différents entre eux.

4.3. Démonstration du lemme dans le cas $r = n - 1$. — Les combinaisons de Z_{n-1} peuvent être désignées univoquement, en déclarant l'élément e qui leur manque [et qui appartient au cycle (42)]; soit en général K_e la combinaison sans élément e. Le cycle de combinaisons

$$(43) \qquad K_{e_1}, \ldots, K_{e_p} \quad (p+1 \to 1)$$

contient toutes les combinaisons de Z_{n-1}. On peut passer toujours d'une combinaison $K_{e_{\pi+1}} (1 \leqslant \pi \leqslant p)$ à K_{e_π}, en effectuant l'opération qui remplace l'élément e_π par $e_{\pi+1}$. De même, en parcourant les éléments du cycle (43) dans l'ordre inverse, on peut, par un nombre fini d'opérations convenables O, passer d'une combinaison quelconque à une autre choisie à volonté. Le lemme est ainsi démontré pour $r = n - 1$.

4.4. Démonstration du lemme dans le cas général. — Supposons d'abord qu'on ait à transformer une combinaison K de Z_r en une autre combinaison L qui ne diffère de K que d'*un seul élement*. Dans ce but, nous négligeons dans le cycle (42) tous ces éléments qui n'appartiennent à aucune des combinaisons K, L. Nous regardons les éléments restants, sans changer leur ordre, comme un cycle nouveau

$$(44) \qquad e'_1, \ldots, e'_{p'} \quad (p'+1 \to 1).$$

Parmi les éléments de ce cycle, $r+1$ sont différents. De même, nous négligeons, pour moment, dans Z_r toutes les combi-

naisons, contenants au moins un élément qui n'appartient ni à K, ni à L. La partie restante de l'ensemble soit Z'_r; elle contient, évidemment, les deux combinaisons K et L.

Nous définissons, dans l ensemble Z'_r, des opérations O', dont chacune remplace un élément e' d une combinaison de Z'_r par un élément e'^*, tel que e' et e'^* soient voisins dans le cycle (44).

Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'on peut, par une suite finie d'opérations O', transformer chaque combinaison de Z'_r en une autre, en particulier K en L.

Or, chaque opération O' peut être remplacée par une suite convenable d opérations O, effectuées sur les combinaisons de Z_r.

En effet, supposons que l'opération donné O' fait changer l'élément e' d'une combinaison M, appartenant à Z'_r, en e'^*. Les deux éléments e' et e'^* appartiennent non seulement au cycle (44), mais ils se trouvent aussi dans le cycle (42); supposons que leurs indices, dans (42), soient π et ϱ; ça veut dire que $e' = e_\pi$, $e'^* = e_\varrho$. Les éléments e' et e'^* étant voisins dans (44), on peut supposer qu'il n'y ait plus, entre e_π et e_ϱ(en parcourant le cycle dans le sens positif), d'éléments appartenants à K ou L. On peut donc remplacer, dans M, l'élément e_π successivement par $e_{\pi+1}, \dots, e_\varrho$ sans introduire des éléments répétés.

On voit que chaque combinaison de Z'_r peut être transformée, par une suite d'opérations O convenablement choisie en une autre combinaison arbitraire de Z'_r. En particulier, on peut transformer K en L.

Le lemme est ainsi démontré pour *chaques* deux combinaisons de Z_r qui diffèrent d'*un seul* élément, car les combinaisons K et L ont été choisies arbitrairement. Or, en sachant transformer chaque combinaison de Z_r en une autre qui en diffère d'un seul élément, on peut évidemment la transformer, pas à pas, en une autre combinaison qui en diffère d'un *nombre arbitraire* d'éléments.

On peut donc regarder le lemme comme démontré complètement.

4.5. Un théorème sur les systèmes connexes.

Théorème. *Soit*

(2') $$x_i' = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\,x_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

un système d'équations différentielles linéaires et soit

(45) $$u_J' = \sum_K F_{JK}(t)\,u_K \quad \left(\begin{matrix}J \text{ et } K \text{ parcourent toutes les combinaisons}\\ \text{à } q \text{ éléments } (q \leqslant n) \text{ des nombres } 1, \dots, n\end{matrix}\right)$$

un système, issu de (2'), *qui est satisfait par un complet de déterminants combinés à q colonnes principales* [2]).

Si le système (2') *est connexe dans un point* ξ, *le système* (46) *l'est aussi.*

Démonstration. Soient I' et I'' deux combinaisons arbitraires à q élements des nombres $1, \dots, n$. Il faut démontrer qu'il existe une suite de combinaisons

(46) $$I_0, I_1, \dots, I_s \quad (I_0 = I', I_3 = I''),$$

telle que

$$F_{I_\sigma I_{\sigma-1}}(\xi) \neq 0 \quad (\sigma = 1, \dots, s).$$

En vertu de **2.3.** on a

$$F_{I_\sigma I_{\sigma-1}}(t) = \pm f_{j_\sigma j_{\sigma-1}}(t),$$

lorsque les combinaisons $I_\sigma, I_{\sigma-1}$ diffèrent d'un seul élément, notamment I_σ contient j_σ et est dépourvu de $j_{\sigma-1}$, $I_{\sigma-1}$ inversement. Il suffit donc de construire une suite (46) telle que chaque combinaison I_σ se déduise de la précédante $I_{\sigma-1}$ par le changement d'un seul élément, disons: de l'élément $j_{\sigma-1}$ en j_σ; il faut encore que

$$f_{j_\sigma j_{\sigma-1}}(\xi) \neq 0 \quad \text{pour} \quad \sigma = 1, \dots, s.$$

Or, c'est toujours possible, en vertu du lemme précédent, car, le système (2') étant connexe, on peut construire un cycle

---

[2]) Voir **2.3.**

d'indices

$$j_1, \dots, j_p \quad (p+1 \to 1)$$

contenants tous les nombres $1, \dots, \widehat{n}$, tel que

$$f_{j_{\pi+1} j_\pi}(\xi) \neq 0 \quad \text{pour} \quad \pi = 1, \dots, p.$$

5. Système cyclique généralisé.

5.1. Types des systèmes cycliques généralisés. — Nous appliquerons maintenant la théorie du présent travail au système d'équations

$$(47) \qquad \begin{cases} x_1' = f_{1n}(t) x_n + f_{11}(t) x_1 + f_{12}(t) x_2, \\ x_2' = f_{21}(t) x_1 + f_{22}(t) x_2 + f_{23}(t) x_3, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n' = f_{n,n-1}(t) x_{n-1} + f_{nn}(t) x_n + f_{n1}(t) x_1, \end{cases}$$

dont la construction devient plus claire, lorsqu'on écrit la matrice complète de coefficients:

$$\begin{matrix} f_{11} & f_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & f_{32} & f_{33} & f_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{43} & f_{44} & f_{45} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f_{n,n-1} & f_{nn}. \end{matrix}$$

Le système (47) sera dit *système cyclique généralisé*, en abregé *SCG*.

Pour plus de symétrie nous convenons que le signe 0 désignera le même que n et le signe $n+1$ le même que 1 (congruence modulo n). Alors, on peut écrire le système (47) sous une forme plus courte

$$(48) \qquad x_\nu' = f_{\nu,\nu-1} x_{\nu-1} + f_{\nu,\nu} x_\nu + f_{\nu,\nu+1} x_{\nu+1} \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Supposons que, dans un intervalle I

1° tous le coefficients de (48) soient continus,

2° on ait, pour chaque indice fixé $\nu = 1, \dots, n$.

(a) $$f_{\nu,\nu+1} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f_{\nu+1,\nu} \leqslant 0$$

ou bien

(b) $$f_{\nu,\nu+1} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f_{\nu+1,\nu} \geqslant 0.$$

Supposons ensuite que les inégalités (a) aient lieu pour p valeurs de ν et les inégalités (b) pour $n-p$ valeurs restantes de ν.

Lorsque p est pair, le système (48) (satisfaisant aux conditions 1⁰ et 2⁰) sera désigné par SCG_p; lorsque p est impair, il sera désigné par SCG_i.

Lorsque les inégalités (b) ont lieu pour toutes les valeurs de ν, on a un cas spécial de SCG_p que nous désignerons par SCG_p^*. Lorsque les inégalités (b) ont lieu pour toutes les valeurs de ν, exceptée la dernière où on a (b) pour $\nu = n$, on a un cas spécial de SCG_i que nous désignerons par SCG_p^*. On a $p=0$ pour SCG_p^* et $p=n-1$ pour SCG_i^*.

5.2. Réduction aux types SCG_p^* ou SCG_i^*. — Nous montrerons que chaque système SCG peut être réduit, par une transformation convenable, en SCG_p^* ou SCG_i^*.

Supposons que

$$f_{\nu,\nu+1} < 0 \quad \text{ou} \quad f_{\nu,\nu+1} < 0 \quad \text{pour} \quad \nu = \nu_1, \dots, \nu_p \quad (1 \leqslant p \leqslant n)$$

dans certains points de l'intervalle I et

$$f_{\nu,\nu+1} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f_{\nu+1,\nu} \geqslant 0 \quad \text{pour tous les } \nu \text{ restants}$$

dans l'intervalle entier I. Alors, en effectuant la transformation $T(\nu_1+1, \nu_1+2, \dots, \nu_2)$ (**3.5.**), on changera le signe des fonctions f_{ν_1,ν_1+1}, f_{ν_2,ν_2+1} et f_{ν_1+1,ν_1}, f_{ν_2+1,ν_2}; ces fonctions deviendront ainsi non négatives dans I; le signe des fonctions restantes (coefficients de SCG) ne changera pas. De même, on peut rendre non négatives les fonctions f_{ν_3,ν_3+1}, f_{ν_4,ν_4+1} et f_{ν_3+1,ν_3}, f_{ν_4+1,ν_4}, en effectuant la transformation $T(\nu_3+1, \nu_2+2, \dots, \nu_4)$. Si le système considéré est SCG_p (et non pas SCG_i), alors p est pair et on peut, en continuant le procédé précédent, rendre non négatives toutes les fonctions $f_{\nu,\nu+1}$ et, en même temps, tous les $f_{\nu+1,\nu}$, où $\nu = \nu_1, \dots, \nu_p$. Si, au contraire, il s'agit d'un système SCG_i, le nombre p est impair, et on peut faire non négatives,

deux à deux, toutes les fonctions $f_{\nu,\nu+1}$ et $f_{\nu+1,\nu}$, où $\nu=\nu_1,\dots,\nu_p$. Il reste encore seulement les fonctions $f_{\nu_p,\nu_{p+1}}$ et f_{ν_{p+1},ν_p} dont l'une au moins est négative. Lorsque $\nu_p=n$, on arrive déjà à SCG_i^*. Si $\nu_p<n$, on peut, par la transformation $T(\nu_p+1,\nu_p+2,\dots,n)$, faire non négatives toutes les fonctions $f_{\nu,\nu+1}$, $f_{\nu+1,\nu}$ sauf $f_{n1}-f_{1n}$. On obtient ainsi le système SCG_i^*.

Grâce à ces transformations les recherches sur les systèmes SCG peuvent toujours être ramenées à celles sur SCG_p ou SCG_i. En particulier, s'il s'agit d'un problème d'interpolation, on voit que maintes de ces fonctions Φ_{ij} (**1.2.**) qui constituent le déterminant caractéristique changent leur signe, les transformations étant effectuées. Par suite, le déterminant en question peut aussi changer de signe. Mais, s'il est différent de zéro, avant d'avoir effectué les transformations, il le restera après. Or, la condition que le déterminant caractéristique soit différent de zéro, étant nécessaire est suffisante pour la solubilité d'un problème d'interpolation, on voit que celle-ci n'est pas du tout influencée par les transformations précedentes.

Après ces remarques, nous nous limiterons dans ce qui suit, à considérer les types SCG_p^* et SCG_i^*.

5.3. Systèmes d'équations des déterminants combinés issus de SCG_p^* et SCG_i^*. — Désignons par U un système quelconque d'équations différentielles linéaires

$$U:\quad x_i'=\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\,x_j \quad (i=1,\dots,n)$$

et par U^q le système d'équations différentielles

$$U^q:\ u_J'=\sum_K F_{JK}(t)\,u_K \left(\begin{matrix}\textit{J et K parcourent toutes les combinai-}\\ \textit{sons à q éléments des nombres } 1,\dots,n\end{matrix}\right)$$

qui correspond à un complet de déterminants combinés à q colonnes principales, issu de U [1]).

[1]) Voir **2.3.** et **4.5.**

Théorème. *Si U est du type SCG_p^*, alors tous les systèmes U^q, où q est impair, sont positifs* (**3.2.**).

Si U est du type SCG_i^*, alors tous les systèmes U^q, où q est pair, sont positifs.

Démonstration. On a à démontrer que, dans les circonstances précédentes, tous les coefficients du système U^q, à moins de diagonale principale, sont non négatifs. Chacun de ces coefficients, à moins d'être zéro, est égal à une des fonctions $f_{\nu,\nu+1}$ ou $f_{\nu+1,\nu}$, prise avec un signe convenable (**2.3.**). Supposons, tout d'abord, que $F_{JK}=F_{j_1\ldots j_q},_{k_1\ldots k_q}=\pm f_{\nu,\nu+1}$, où $1\leqslant\nu\leqslant n-1$. On déduit de la règle de **2.3.** que les combinaisons ne diffèrent entre elles que d'un seul élément, l'une possédant l'élément ν, l'autre $\nu+1$; tous les autres éléments sont les mêmes dans les deux combinaisons. Or, tous les éléments de chaque combinaison étant arrangés dans l'ordre croissant, on voit que ν ainsi que $\nu+1$ sont précédés, dans les combinaisons en question, du même nombre d'éléments, ce qui implique $r=s$. Il s'en suit que la fonction $f_{\nu,\nu+1}$ doit être prise avec le signe *plus*.

La chose se présente tout à fait de même, quand $F_{JK}=\pm f_{\nu+1,\nu}$ $(1\leqslant\nu\leqslant n-1)$; alors on doit prendre aussi le signe plus.

Cherchons encore, qu'est-ce qu'il arrive, quand $F_{JK}=\pm f_{n1}$ resp. $=\pm f_{1n}$. Maintenant, les éléments qui sont différents dans J et K, sont les nombres 1 et n. Le nombre 1 se trouve au commencement d'une des combinaisons, le nombre n à la fin de l'autre, c'est-à-dire à la q-ème place; on a donc $r=1$ et $s=q$ ou, inversement, $r=q$, $s=1$. On a donc

$$F_{JK}=(-1)^{q+1}f_{n1} \quad \text{resp.} =(-1)^{q+1}f_{1n}.$$

En ayant regard aux signes de f_{ij}, on voit que le système U^q est positif dans les circonstances, déterminées dans notre théorème.

5.4. Problème d'interpolation. — On voit, d'après le théorème du paragraphe précédent, que la méthode générale, décrite dans **3.8.**, s'applique aisément aux systèmes SCG_p^* et SCG_i^*.

Si on suppose, *dans le cas de SCG_i^**, que tous les nombres $q_2,\ldots,q_r$ soient pairs, alors tous les systèmes $U_1,\ldots,U_r$ (notations

de **3.8.**) seront positifs. En effet, le „système" U_1 est toujours positif, pour les systèmes suivants on le voit de l'équivalence des symboles

$$(49) \qquad U_\mu = U^{q_\mu + \dots + q_r} \quad (\mu = 1, \dots, r).$$

Dans le cas de SCG_p^*, on voit de (49) que tous les $U_1, \dots, U_r$ seront positifs, lorsque tous les nombres $q_2, \dots, q_{r-1}$ sont pairs, q_r impair.

Mais, pour parvenir au but, en appliquant la méthode de **3.8.**, il faut que les circonstances suivantes soient accomplies:

1⁰ Les variables de $U_1, \dots, U_r$ doivent être liées entre elles, d'une manière convenable (**3.7.**);

2⁰ Les conditions initiales doivent être, toutes les fois, congruentes (**3.5.**).

La première des conditions précédentes peut être assurée facilement par la supposition que le système primitif U soit connexe. Pour assurer la seconde, nous introduirons d'abord une définition qui nous sera utile dans l'énoncé de la proposition.

Définition. Une combinaison $j_1, \dots, j_p$ (p pair), contenant p nombres naturels différents, non nécessairement successifs, mais arrangés dans l'ordre croissant, sera dite *combinaison singulière*, lorsque

$$j_{2\varkappa-1} + 1 = j_{2\varkappa} \quad \text{pour} \quad \varkappa = 1, \dots, \frac{p}{2}.$$

Passons maintenant au problème général d'interpolation, formulé ainsi que dans **1.1.** En se servant des notations y a doptées, on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Le problème d'interpolation a une et une seule solution* [2]), *lorsque*

a) *le système considéré d'équations différentielles est SCG_p^* et le nombre q_r est impair,*

ou bien

SCG_i^* et le nombre q_r est pair;

[2]) Nous énonçons ici une condition suffisante.

b) *les nombres* q_μ, *où* $2 \leqslant \mu \leqslant r-1$, *sont pairs*;

c) *les combinaisons* $j_{\mu 1} \ldots j_{\mu q_\mu}$[1.1.(3)], *où* $2 \leqslant \mu \leqslant r-1$, *sont singulières*;

d) *le système considéré d'équations est connexe dans un point, au moins, de chaque intervalle*

$$a_\mu < t \leqslant a_{\mu+1} \quad (\mu = 1, \ldots, r-1)\ ^{3}).$$

Démonstration. Adoptons les notations de **3.8.** Les prémisses a) et b) assurent, d'après **5.3.**, la positivité de tous les systèmes $U_1, \ldots, U_r$. Afin d'appliquer, aux complets $K_2, \ldots, K_r$, le théorème de **3.2.**, il faut vérifier si les conditions initiales sont non négatives dans les points initiaux des intervalles correspondants.

Or, tous les déterminants du complet K_2 deviennent, pour $t = a_1$, nuls, à l'exception de $W_2^*(a_1) = W(a_1) \neq 0$. On peut supposer que $W_2^*(a_1) > 0$. Alors les conditions initiales pour K_2 seront non négatifs au point $t \doteq a$, ce qui implique, d'après **3.2.**, que tous les déterminants de ce complet soient non négatifs dans $[a_1, a_2]$. La connexité de U_2 qui est une conséquence de d) (**4.5.**), implique ensuite que *tous* les determinants de K_2 soient positifs pour $t = a_2$.

Considérons maintenant ces déterminants de K_3 qui ne diffèrent, pour $t = a_2$, des déterminants (correspondants) de K_2 que de l'ordre des colonnes. Pour les identifier avec ceux de K_2, il faut effectuer un certain nombre de transpositions des colonnes. Or, d'après la définition des déterminants combinés, les indices des colonnes principales sont arrangés dans l'ordre croissant; on voit donc, grâce à c), que le nombre de transpositions sera toujours pair. Il s'en suit que les déterminants considérés du complet K_3 se confondent, pour $t = a_2$, avec ceux de K_2, même quant au signe; ils sont donc positifs. Tous les autres déterminants de K_3 s'annulent pour $t = a_2$. Les conditions initiales sont donc encore non négatives. En vertu de la positivité et de la connexité [assurée par d)] de U_3, on voit de nouveau que *tous* les déterminants de K_3 sont *positifs* pour $t = a_3$.

---

[3]) Pour que la condition *d*) soit satisfaite, il suffit p. e. de supposer que tous les $f_{\nu,\nu+1}$ ou tous les $f_{\nu+1,\nu}$ soient différents de zéro dans $[a_1, a_\nu]$.

Par induction, dont nous ne nous occuperons plus en ce qui concèrne les détails, on déduit que *tous* les déterminants du complet K_ν $(\nu=2,\ldots,\nu)$ sont *positifs* pour $t=a_\nu$. On a donc, en particulier,

$$W_r(a_r)=W(a_1,\ldots,a_r)>0.$$

La positivité de $W(a_1,\ldots,a_r)$ implique (**1.2**) l'existence d'une solution et une unique du problème d'interpolation en question.

5.5. Le problème de M. Biernacki pour l'équation $x^{(n)}+A(t)x=0$. — En terminant le présent travail, nous donnons, comme un exemple de l'application, un corollaire du théorème précédant.

Soit

$$x^{(n)}+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\ldots+a_1(t)x'+a_0(t)x=0 \tag{50}$$

une équation différentielle linéaire du n-ème degré. On considère les courbes intégrales de cette équation, situées dans le plan x, t.

Nous dirons que l'équation (50) est du type B_r $(1\leqslant\nu\leqslant n)$, lorsqu'il est possible, pour chaque système de r points (du plan x, t) aux abcisses t différentes, de trouver une courbe intégrale, passant par ces points, et lorsqu'il existe au moins un système de $r+1$ (aux abcisses t différentes) qui ne peuvent être joints par aucune courbe intégrale.

La détermination du type B_r, lorsque l'équation (50) est donnée, est un problème qui a été précisé par M. Biernacki en 1944. L'auteur a obtenu, entre autres, un résultat pour l'équation

(51) $x^{(n)}+A(t)x=0$ [$A(t)$ étant supposé continu pour tous les t réels].

Le voici:

Lorsque n est pair et $A(t)>\varepsilon>0$, l'équation (51) *est du type* $B_r\left(r\leqslant\dfrac{n}{2}\right)$.

En appliquant le théorème du paragraphe précédent, ce résultat[4]) peut être renforcé, comme il suit:

Lorsque n est pair et $A(t) > \varepsilon > 0$, *l'équation* (51) *est du type* $B_{\frac{n}{2}}$.

Si on s'appuit sur le premier énoncé, il suffit de montrer, en plus, que pour chaque système de $\frac{n}{2}$ points, aux abcisses différentes, il existe une courbe intégrale, passant par ces points. Or, au lieu de l'équation (51) on peut prendre un système d'équations

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \ldots, \quad x_{n-1}' = x_n, \quad x_n' = -A(t)\,x_1$$

qui lui est équivalant ($x = x_1$). On voit sans peine que ce système est du type SGS_l^*. En posant $r = \frac{u}{2}$, $q_1 = q_2 = \ldots = q_r = 2$, $(j_{\mu 1}, j_{\mu 2}) = (1,2)$ pour $\mu = 1, \ldots, \frac{n}{2}$, on peut vérifier que toutes les conditions a), b), c), d) de **5.4.** sont satisfaites. On peut donc imposer aux fonctions $x_1 = x_1(t)$ et $x_2 = x_2(t)$ des valeurs arbitraires dans $\frac{n}{2}$ points $a_1, \ldots, a_{\frac{n}{2}}$, donnés d'avance.

D'une façon analogue, en joignant les résultats de M. Biernacki avec ceux qu'on tire du théorème de **5.4.**, on arrive aux propositions suivantes[5]).

Lorsque n est pair et $A(t) < -\varepsilon < 0$, *l'équation* (51) *est du type* $B_{\frac{n}{2}+1}$.

Lorsque n est impair et $|A(t)| > \varepsilon > 0$, *l'équation* (51) *est du type* $B_{\frac{n+1}{2}}$.

---

[4]) Les résultats de M. Biernacki seront publiés dans ces Annales.

[5]) Les détails ne seront plus considérés ici. Nous en donnerons dans un autre travail, consacré spécialement aux systèmes *SCG*.

COMPTES-RENDUS DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

ANNÉE 1946

ÉTAT DE LA SOCIÉTÉ

BUREAU CENTRAL

élu à l'assemblée générale de la Société Polonaise de Mathématique qui a eu lieu le 5 mai 1946 à Varsovie.

Président de la Société: Prof. Dr Kazimierz Kuratowski.

Vice-Présidents de la Société: Présidents des Sections de Cracovie, de Poznań et de Wrocław.

Secrétaire de la Société: Doc. Dr Andrzej Mostowski.

Trésorier de le Société: Prof. Dr Karol Borsuk.

Commission de Controle: Dr Zygmunt Butlewski, Prof. Dr Stanisław Gołąb, Prof. Dr Bronisław Knaster.

SECTION DE CRACOVIE

Président de la Section: Prof. Dr Franciszek Leja.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Tadeusz Ważewski.

Secrétaire de la Section: Prof. Dr Adam Bielecki.

Trésorier de la Section: Prof. Dr Stanisław Gołąb.

Membres du Bureau de la Section: Prof. Dr Jan Leśniak, Prof. Dr Jan Weyssenhof, Prof. Dr Włodzimierz Wrona.

Commission de Controle: Prof. Dr Wacław Sierpiński, Prof. Dr Jan Mikusiński, Dr Henryk Titz.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Franciszek Leja, Prof. Dr Tadeusz Ważewski, Prof. Dr Stanisław Gołąb, Prof. Dr Adam Bielecki.

SECTION DE POZNAŃ

Président de la Section: Prof. Dr Władysław Orlicz.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Władysław Smosarski.

Secrétaire de la Section: Dr Andrzej Alexiewicz.

Trésorier de la Section: Dr Zygmunt Butlewski.

Membre du Bureau de la Section: Prof. Antoni Schönhuber.

Commission de Controle: Prof. Dr Szczepan Szczeniowski, Prof. Dr Józef Witkowski, Mgr Marian Jarosz.

Délégués à Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Władysław Orlicz, Dr Andrzej Alexiewicz.

Suppléants des Délégués: Dr Zygmunt Butlewski, Dr Franciszek Zeidler.

SECTION DE WROCŁAW

Président de la Section: Prof. Dr Hugo Steinhaus.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Władysław Ślebodziński.

Secrétaire et Trésorier de la Section: Mgr Stanisław Hartman.

Membre du Bureau de la Section: Prof. Dr Edward Marczewski.

Commission de Controle: Prof. Dr Stanisław Loria, Prof. Dr Bronisław Knaster, Mgr Bolesław Iwaszkiewicz.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Bronisław Knaster, Prof. Dr Edward Marczewski.

SECTION DE VARSOVIE

Président de la Section: Prof. Dr Karol Borsuk.

Vice-Président de la Section. Prof. Dr Władysław Nikliborc.

Secrétaire de la Section: Mgr Zygmunt Charzyński.

Suppléante du Secrétaire: Alina Böhmówna.

Trésorier de la Section: Prof. Dr Kazimierz Zarankiewicz.

Membres du Bureau de la Section: Prof. Dr Wacław Sierpiński, Prof. Dr Kazimierz Kuratowski.

Commission de Controle: Dr Halina Grużewska, Prof. Dr Stefan Straszewicz.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Mgr Zygmunt Charzyński, Prof. Dr Kazimierz Kuratowski, Prof. Dr Wła-

dysław Nikliborc, Prof. Dr Wacław Sierpiński, Prof. Dr Kazimierz Zarankiewicz.

Suppléants des Délégués: Prof. Dr Edward Otto, Doc. Dr Andrzej Mostowski, Mgr Roman Sikorski.

LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

Il a été impossible d'établir la liste tout-à-fait précise des membres de la Société. La liste suivante contient aussi les noms de ceux dont la Rédaction n'a point de nouvelles. Suit la liste des membres décédés.

Signes: (C) = Cracovie, (Ł) = Łódź[1]), (P) = Poznań, (Wr) = Wrocław, (V) = Varsovie, (*) avant le nom désigne le manque des nouvelles, (*) avant resp. à la place de l'adresse signifie que l'actualité de l'adresse est problématique, resp. que l'adresse est inconnue.

(P) Ajdukiewicz Kazimierz, Prof. Dr, *Poznań*, ul. Fredry 7.
(V) Alexandrow Paul, Prof. Dr, *Moskwa* (U. R. S. S.), (*) Staropimenowski per. 8 kw. 5.
(P) Alexiewicz Andrzej, Dr, *Poznań*, ul. Karwowskiego 12.
(V) Archibald R. C., Prof. Dr, *Providence* (R. I., U. S. A.), Brown University.
(V) (*) Aronszajn Natan, Dr
(C) Banachiewicz Tadeusz, Prof. Dr, *Kraków*, Obs. Astron., ul. Kopernika 27.
(C) Baran Jan, (*) *Toruń*, Małe Garbary, Gimn. Męskie.
(C) Barnett I. A., Prof. Dr, (*) *Cincinnati* (Ohio, U. S. A.), University.
(V) Bary Nina, Prof. Dr, (*) *Moskwa* (U. R. S. S.), Pokrowka 29 kw. 22.
(V) Bergman Stefan, Prof. Dr, *Cambridge* (Mass, U. S. A), Harvard University, 201 Pierce Hall.
(V) Białobrzeski Czesław, Prof. Dr, *Warszawa*, Zakład Fizyki Teoretycznej, ul. Hoża 69.
(C) Bielecki Adam, Prof. Dr, *Kraków*, ul. Zbrojów 3.
(P) Biernacki Mieczysław, Prof. Dr, *Lublin*, ul. Bonifraterska 5.
(C) Birkenmajer Aleksander, Prof. Dr, *Poznań*.
(Wr) Birnbaum Zygmunt, Dr, *Seattle*, 5 (Wash. U. S. A.).

---

[1]) La Section de Łódź fut fondée en Décembre 1946.

(C) Blaton Jan, Prof. Dr, *Kraków*, Zakład Fizyki Teoretycznej U. J., ul. Gołębia 13.
(Wr) Bonder Juliusz, Prof. Dr, *Gliwice*, ul. Arkońska 3.
(V) Borsuk Karol, Prof. Dr, *Warszawa*, Seminarium matematyczne, ul. Hoża 69.
(C) Bouligand Georges, Prof. Dr, *Paris*, 46 rue S[t] André des Arts.
(V) Böhmówna Alina, *Warszawa*, Seminarium matematyczne, ul. Hoża 69.
(C) Burzyński Jan, Mgr, *Kraków*, ul. Krowoderska 25.
(P) Butlewski Zygmunt, Dr, *Poznań*, ul. Słowackiego 35.
(C) Cartan Elie, Prof. Dr, *Paris*, (*), Université de Paris, Faculté de Sciences.
(C) Čech Edward, Prof. Dr, (*) *Brno*, Č. S. R., Nova 49.
(V) Charzyński Zygmunt, Mgr, *Warszawa* (Saska Kępa), ul. Francuska 3 a.
(P) Chmielewska Melania, Mgr, *Karpacz*, pow. Jelenia Góra.
(C) Choquet Gustave, Dr, Prof. de l'Institut Français, *Kraków*, al. Słowackiego 8.
(V) Chromiński Antoni, Prof. *Kraków*, ul. św. Tomasza 30.
(C) Cotton Emile, Prof. Dr, (*) *Grenoble* (Isère, France), 1 Place St. Laurent.
(P) Cwojdziński Kazimierz, Dr, *Poznań*, Szkoła Inżynierska, Plac Bergera 5.
(V) Czechowski Tadeusz, Mgr, *Warszawa*, ul. Szustra 18, m. 11.
(P) Czekanowski Jan, Prof. Dr, *Poznań*, Coll. Kopernickiego.
(V) (*) Czernik Tadeusz, Mgr
(V) Czyżowski Mieczysław, Mgr, *Warszawa*, ul. Myśliwiecka 6, Gimn. Batorego.
(P) Dąbrowski Stefan, Prof. Dr, *Poznań*, ul. Słowackiego 29.
(C) Delsarte Jean, Maitre de Conf. à la Fac. des Sci., (*)*Nancy*, 35 rue St. Michel (Meurthe et Moselle, France).
(C) (*) Długowski Gerard.
(P) Dobrzycki Stanisław, Mgr, *Kielce*, Liceum im. St. Kostki.
(C) Dollon Jean, Prof. Dr, (*) *Nancy*.
(Wr) Drobot Stefan, Dr, *Wrocław*, ul. Pugeta 14.
(C) Durand Georges, Dr, Chargé du Cours à la Fac. des Sci., (*) *Toulouse* (Haute Garonne, France), 87 rue du Dix Avril.

(C) Echegaray André, Prof. Dr., (*)*Lima* (Peru), Universitad.
(V) Eilenberg Samuel, Prof. Dr, *Bloomington* (Ind., U. S. A.), Swain Hall.
(V) Errera Alfred, Prof. Dr, (*)*Uccle* (Belgique).
(Wr) Feller William, Prof. Dr, Cornell University, *Ithaca*, N. Y., U. S. A.
(C) Fijoł Kazimierz, *Kraków*, Gimn. IV, ul. Krupnicza 2.
(C) Flamant Paul, Prof. Dr, (*) *Strassbourg* (Bas-Rhin, France 35 rue Schweighauser.
(C) Frydrych Zdzisław, Mgr, *Kraków*, ul. Krowoderska 6.
(V) Garcia Godofredo, Prof. ing., *Lima* (Peru), (*) Apardodo 1979.
(P) Gibasiewicz Witold, Mgr, *Kościan*, ul. Kościelna 4.
(V) Gindifer Mieczysław, Mgr, *Komorów* pod Warszawą, ul. Akacjowa 4.
(C) Godeaux Lucien, Prof. Dr, (*) *Liège* (Belgique), 75 rue Frédéric Nyst.
(C) Gołąb Stanisław, Prof. Dr, *Kraków*, ul. Łobzowska 61.
(P) Gospodarek Stefan, Mgr, *Poznań*, Rynek Jeżycki 1.
(V) Greniewski Henryk, Dr, *Warszawa*, ul. Konopnickiej 6 (Y. M. C. A.).
(V) Grużewska Halina, Dr, *Warszawa*, ul. Rakowiecka 6, m. 35 (S. G. H.).
(V) Grużewski Aleksander, Dr, (*)
(Wr) Hartman Stanisław, Mgr, *Wrocław*, Wyczółkowskiego 17.
(C) Härlen Hasso, Dr, (*)
(Wr) (*) Hetper Władysław, Dr,
(V) Huber Maksymilian, Prof. Dr, *Gdańsk*, Politechnika.
(V) Hurewicz Witold, Prof. Dr, *Princeton*, N. J., U. S. A., Fine Hall.
(Wr) Infeld Leopold, Prof. Dr, University of *Toronto*, Canada.
(Wr) Ingarden Roman, Mgr, *Wrocław*, Kochanowskiego 57.
(Wr) Iwaszkiewicz Bolesław, Mgr, *Wrocław*, Kuratorium Okr. Szk. Wrocł., ul. Curie Skłodowskiej.
(P) (*) Jackiewicz Zygmunt, Mgr,
(C) Janet Maurice, Prof. Dr, (*)
(P) Jankowski Wiktor, Mgr, *Poznań*, ul. Rzepeckiego 32.
(Wr) Jarník Vojtech, Prof. Dr, Praha, Pevnostné 1.

(P) Jarosz Marian, Mgr, *Poznań*, Wielkie Garbary 44.
(V) Jaśkowski Stanisław, Prof. Dr, *Toruń*, ul. Bydgoska 78.
(C) Kampé de Fériet Joseph, Prof. Dr, (*) *Lille* (Nord, France), 16 rue des Jardins.
(P) Karaśkiewicz Edmund, Mgr, *Bydgoszcz*, Kołłątaja 3.
(Wr) Kac Marek, Prof. Dr, Cornell University, *Ithaca*, N. Y., U. S. A.
(C) (*) Kawaguchi Akitsugu, Prof. Dr,
(V) Kline J. R., Prof. Dr, Dep. of Math., University of Pennsylvania, *Philadelphia* (Pa., U. S. A.).
(Wr) Knaster Bronisław, Prof. Dr, *Wrocław* 12, Orłowskiego 15 m. 1.
(V) Kozakiewicz Wacław, Prof. Dr, University of Saskatchewan, *Saskatoon*, Sask., Canada.
(C) Kozieł Karol, Doc. Dr, *Kraków*, Obs. Astron., ul. Kopernika 27.
(P) (*) Krużycka Klara, Mgr,
(P) Krygowski Zdzisław, Prof. Dr, *Poznań*, Matejki 37.
(Ł) Krysicki Włodzimierz, *Łódź* (*).
(C) Krzyżański Mirosław, Dr, *Kraków*, ul. Łobzowska 46.
(Wr) Kulczyński Stanisław, Prof. Dr, *Wrocław*, ul. Kasprowicza 17.
(V) Kuratowski Kazimierz, Prof. Dr, *Warszawa*, Seminarium matematyczne, ul. Hoża 69.
(C) Labrousse Leon, Prof. Dr, (*)*Paris* 7 , 7 rue Léon Vaudyer, France.
(C) Laine Edouard, Prof. Dr, (*) *Angers* (Maine et Loïre), France, 3 rue de Rabelais.
(C) Lefschetz Salomon, Prof. Dr, *Princeton*, N. J., U. S. A., University.
(C) Leitner Roman, *Kraków*, ul. Hermina Piątka 19.
(C) Leja Franciszek, Prof. Dr, *Kraków*, Łobzowska 61.
(C) Leśniak Jan, Dr, *Kraków*, ul. Zygmunta Augusta 5.
(C) Leśnodorski Gustaw, *Kraków*, ul. Sobieskiego 10.
(Wr) (*) Lichtenberg Władysław,
(Wr) Loria Stanisław, Prof. Dr, *Wrocław*, Kochanowskiego 5.
(V) Łomnicki Zbigniew, (*).
(V) Łukasiewicz Jan, Prof. Dr, *Dublin* (Ireland), 2 Upr. Fitzwilliamstr.

(V) Łuzin Nikołaj, Prof. Dr, *Moskwa* (U. R. S. S.), (*) Arbat 25/18.
(Wr) (*) Maksymowicz Adam, Dr,
(C) Mandelbrojt S., Prof. Dr, *Paris* 6e, 20 rue Leverrier.
(Wr) Marczewski Edward, Prof. Dr, *Wrocław*, M. Gierymskiego 51.
(V) (*) Matulewicz Konstanty.
(Ł) Mazur Stanisław, Prof. Dr, *Łódź*, (*).
(P) Meder Józef, Mgr, *Poznań*, ul. Skarbka 37.
(V) Menger Karl, Prof. Dr, Notre Dame University, *Notre Dame* (Ind., U. S. A.).
(V) Mieńszow Dimitrij, Prof. Dr, *Moskwa* (U. R. S. S.), (*) Dievitchie Pole, Bojeninowski per 5, kw. 4.
(P) Mikusiński Jan, Prof. Dr, *Lublin*, ul. Narutowicza 20.
(Wr) Montel Paul, Prof. Dr, *Paris* 14, France, 79 rue du Faubourg Saint Jacques.
(V) Moore R. L., Prof. Dr, *Austin* 12 (Tex., U. S. A.), University of Texas.
(C) Moroń Władysław, (*) *Katowice*,
(Wr) Moroń Zbigniew, Mgr, *Wrocław*, ul. Olszewskiego 118 m. 3.
(V) Mostowski Andrzej, Doc. Dr, *Warszawa* (Czerniaków), Powsińska 24 a/6.
(Wr) (*) Napadiewiczówna Zofia,
(V) Spława-Neyman Jerzy, Prof. Dr, *Berkeley* (Calif., U. S. A.), University of California.
(V) Nikliborc Władysław, Prof. Dr, *Warszawa*, Politechnika, ul. Lwowska 7.
(C) Nikodym Otton, Prof. Dr, *Kraków* (Bronowice Małe), ul. Łąkowa 17.
(C) Nikodymowa Stanisława, Dr, *Kraków* (Bronowice Małe), ul. Łąkowa 17.
(Wr) Nosarzewska Maria, Mgr, *Wrocław*, Nowowiejska 85/4.
(C) (*) Ohrenstein Szymon.
(P) Orlicz Władysław, Prof. Dr, *Poznań*, ul. Grunwaldzka 14.
(Ł) Otto Edward, Prof. Dr, *Łódź*, ul. Kilińskiego 82.
(C) Pearson Egon Sharpe, Prof. Dr, (*) *London* W. C. 1, University College, Galton Laboratory.
(Wr) Perkal Julian, Mgr, *Wrocław*, ul. Nowowiejska 109.
(P) Piątkowski Mieczysław, Mgr, *Środa*, Liceum.

(V) Piccard Sophie, Prof. Dr, *Neuchatel* (Suisse), Cassardes 14.
(V) Picone Mauro, Prof. Dr, Istituto per le Applicazioni del Calcolo, *Roma* (Italia).
(Wr) Plamitzer Helena, (*).
(C) Pogany Wojciech, Inż, *Kraków*, św. Marka 8.
(V) Pogorzelski Witold, Prof. Dr, *Warszawa*, Politechnika ul. Lwowska 7.
(C) Popovici Constantin, Prof. Dr, (*) *Bucuresti*, Univ.
(V) Poprużenko Jerzy, Dr, (*) *Warszawa* Praga, ul. Szwedzka 39.
(C) Romanowski Świętosław, Dr, *Kraków*, ul. Szlak 24.
(C) Rosenblatt Alfred, Prof. Dr, *Lima* (Peru), Universitad.
(C) Rosental Stefan, Dr, *Kobenhavn*, Helgoladsgade 15.
(C) Rozmus Antoni, (*) *Zakopane*.
(P) Roszko Paweł, Mgr, *Poznań*, Niegolewskich 10.
(V) Rubinowicz Wojciech, Prof. Dr, *Warszawa*, ul. Hoża 74.
(V) Rudnicki Juliusz, Prof. Dr, *Toruń*, Uniwersytet.
(P) Ryffertówna Halina, Mgr, *Poznań*, ul. Grochowska 21.
(C) (*) Scheybal Adolf.
(P) Schönhuber Antoni, *Poznań*, Plac Bergera 5.
(C) Sedlak Stefan, *Katowice*, Śląskie Zakłady Techniczne.
(Ł) Seipelt-Ławęcka Lidia, Dr, *Łódź*, (*).
(C) Sergesco Pierre, Prof. Dr, (*) *Cluj* (Rumunia).
(V) Sieczka Franciszek, Ks. Dr, *Radzanów* nad Wkrą, pow. Mława.
(C) Siedmiograj Zdzisław, Mgr, *Kraków*, Wydz. Politechn. A. G., Al. 3 Maja 7.
(V) Sierpiński Wacław, Prof. Dr, *Warszawa*, ul. Marszałkowska 73, m. 11.
(V) Sikorski Roman, Mgr, *Mszczonów*, ul. Poniatowskiego 2.
(V) Singh Avardesh Narayan, Prof. Dr, *Lucknow* (India), University.
(V) Słupecki Jerzy, Doc. Dr, *Lublin*, ul. Głowackiego 2, m. 2.
(P) (*) Smolińska Stefania
(P) Smosarski Władysław, Prof. Dr, *Poznań*, Golęcin, Inst. Meteor. U. P.,
(P) Sobaszek Jan, Mgr, *Poznań*, ul. Hetmańska 31.
(V) Sobociński Bolesław, Doc. Dr, (*).
(V) (*) Sokołowski Lech, Dr.
(P) Sroka Aleksander, Mgr, *Poznań*, ul. Focha 84.

(C) Stamm Edward, (*) *Wieliczka.*
(C) Stankiewicz Ksawery, Inż, *Kraków*, Szkoła Rzemieślnicza, ul. Krupnicza 44.
(Wr) Stark Marceli, Mgr, *Wrocław*, Piastowska 43.
(Wr) (*) Starosolska-Szczepanowska Zofia.
(Wr) Steinhaus Hugo, Prof. Dr, *Wrocław*, Orłowskiego 15.
(V) Straszewicz Stefan, Prof. Dr, *Warszawa*, Politechnika, ul. Lwowska 7.
(Wr) Szałajko Kazimierz, Mgr, *Gliwice*, ul. Orlickiego 3, m. 4.
(C) Szarski Jacek, Dr, *Kraków*, Rynek Główny 6.
(P) Szczeniowski Szczepan, Prof. Dr, *Poznań*, ul. Grunwaldzka 14.
(Wr) (*) Szczepanowski Karol,
(V) Szmielew Wanda, *Łódź*, ul. Legionów 24, m. 42.
(Ł) Szmuszkowicz Hanna, Mgr, *Łódź*, ul. Wulczańska 67, m. 8 a.
(C) Szmydt Zofia, Mgr, *Kraków*, ul. Kordeckiego 5.
(V) Szymański Piotr, Dr, *Kopenhaga*, Légation de Pologne.
(Wr) Ślebodziński Władysław, Prof. Dr, *Wrocław*, Michałowskiego 26.
(V) Tarski Alfred, Prof. Dr, *Berkeley* 8, 1001 Cragmont Ave, Calif., U. S. A.
(C) Titz Henryk, Dr, *Kraków*, ul. św. Tomasza 27.
(C) Turowicz Andrzej, Dr, Opactwo *Tyniec* pod Krakowem.
(C) Turski Stanisław, Prof. Dr, *Gdańsk*, Politechnika.
(Wr) Ulam Stanisław, Prof. Dr, Los Alamos Laboratory (New Mexico, U. S. A.), p. o. box 1663.
(C) Urbański Włodzimierz, (*).
(V) Walfisz Arnold, Prof. Dr, *Tyflis* (U. R. S. S.), Saba-Solkhana 11.
(Wr) Warmus Mieczysław, Mgr, *Wrocław*, Kosynierska 28/2.
(C) Ważewski Tadeusz, Prof. Dr, *Kraków*, ul. Starowiślna 77.
(C) Weyssenhoff Jan, Prof. Dr, *Kraków*, Al. Słowackiego 15.
(C) Węgrzynowicz Leopold, (*).
(P) Węgrzynowicz Marian, *Poznań*, Matejki 52.
(C) Whyburn Gordon T., Prof. Dr, *Austin* (Texas, U. S. A.).
(C) Wileński Henryk, Mgr, (*).
(Wr) Wilkoński Andrzej, Mgr, *Wrocław*, Al. Piastów 83.
(C) Wilkoszowa Irena, Mgr, *Kraków*, ul. Słoneczna 28.

(V) Winogradow I., Prof. Dr, *Moskwa* 49 (U. R. S. S.), Bolszaja Kałwiskaja 67, Mat. Inst. Akad. Nauk.
(P) Witkowski Józef, Prof. Dr, *Poznań*, Obserwatorium Astronomiczne.
(V) Wolibner Witold, Dr, *Staszów*, ul. Rytwiańska 15.
(C) Wrona Włodzimierz, Dr, *Kraków*, ul. Nowowiejska 12.
(V) Wundheiler Aleksander, Dr, Bur. of Ordnance, Navy. Dept., *Washington* 25, D. C. Re 3 d (U. S. A.).
(C) Zahorski Zygmunt, Dr, *Kraków*, Podwale 1.
(C) Zakrocki Stanisław, *Kraków*, I Gimn., Plac na Groblach.
(V) Zarankiewicz Kazimierz, Prof. Dr, *Warszawa*, ul. Wawelska 19, m. 11.
(C) Zaremba Stanisław Krystyn, Prof. Dr, (*),
(C) Zawirski Zygmunt, Prof. Dr, *Kraków*, ul. Stradom 27.
(P) Zeidler Franciszek, Dr, *Poznań*, ul. Karwowskiego 24.
(V) Zermelo Ernst, Prof. Dr, (*)*Freiburg* i Br., Karlstr. 60.
(P) Znamierowski Czesław, Prof. Dr, *Poznań*, Uniwersytet.
(P) Zygmanowski Franciszek, Mgr, *Poznań*, ul. Hetmańska 5.
(V) Zygmund Antoni, Prof. Dr, University of Pennsylwania, *Philadelphia* (Pa, U. S. A.) Bennet Hall.
(V) Zygmundowa Irena, Dr, University of Pennsylvania, *Philadelphia* (Pa, U. S. A.).
(V) Żorawski Kazimierz, Prof. Dr, *Warszawa*, ul. Polna 44, m. 6.
(Ł) Żyliński Eustachy, Prof. Dr, (*).

LISTE DES MEMBRES DÉCÉDÉS

Dans le volume XVIII des ces Annales, pp. II—IV se trouve une liste provisoire, contenant 42 noms des membres décédés pendant la guerre. Les nouvelles qui sont parvenues depuis permettent d'établir la liste plus complète, contenant 62 noms.

Auerbach Herman, Chargé du cours à l'Université de Lwów.

Banach Stefan, Professeur à l'Université de Lwów.

Bartel Kazimierz, Professeur et ancien Recteur de l'Ecole Polytechnique de Lwów.

Blumenfeld Izydor, Ing.

Braunówna Stefania, Mgr.

Chmielewski Stanisław, Professeur au lycée à Poznań.
Chwistek Leon, Professeur à l'Université de Lwów.
Dickstein Samuel, Professeur à l'Université de Varsovie.
Dniestrzański Roman, Professeur au lycée à Chrzanów.
Eidelheit Maks, Docteur de mathématique.
Fogelson Samuel, Mgr.
Freilich Arnold, Docteur de mathématique.
Grabowski Lucjan, Professeur à l'Université de Lwów.
Hoborski Antoni, Professeur et ancien Recteur de l'Académie des Mines, Professeur à l'Université de Cracovie.
Jacob Marian, Chargé du cours à l'Université de Lwów.
Janik Wincenty, Professeur au lycée à Cracovie.
Jantzen Kazimierz, Professeur à l'Université de Wilno.
Kaczmarz Stefan, Chargé du cours à l'Université de Lwów.
Kalandyk Stanisław, Professeur à l'Université de Poznań.
Kalicun Chodowiecki Bazyli, Docteur de mathématique.
Kempisty Stefan, Professeur à l'Université de Wilno.
Kerner Michał, Docteur de mathématique.
Kierst Stanisław, Mgr.
Kobrzyński Zygmunt, Docteur de mathématique.
Kołodziejczyk Stanisław, Docteur de mathématique.
Koźniewski Andrzej, Docteur de mathématique.
Kwietniewski Stefan, Chargé du cours à l'Université de Varsovie.
Lebesgue Henri, Professeur du Collège de France à Paris.
Leśniewski Stanisław, Professeur à l'Université de Varsovie.
Levi-Civita Tullio, Professeur à l'Université de Rome.
Lindenbaum Adolf, Chargé du cours à l'Université de Varsovie.
Lindenbaum Janina, Docteur de mathématique.
Lubelski Salomon, Docteur de mathématique.
Łomnicki Antoni, Professeur et Prorecteur de l'Ecole Polytechnique de Lwów.
Mathison Miron, Chargé du cours à l'Université de Varsovie.
Marcinkiewicz Józef, Chargé du cours à l'Université de Wilno.

Marconi Andrzej, Professeur au lycée à Poznań.
Mazurkiewicz Stefan, Professeur et Prorecteur de l'Université de Varsovie.
Patkowski Józef, Professeur à l'Université de Wilno.
Pepis Józef, Docteur de Mathématique.
Posament Tadeusz, Mgr.
Prasad Gonesh, Professeur à l'Université de Calcutta.
Presburger Mieczysław, Mgr.
Przeborski Antoni, Professeur à l'Université de Varsovie.
Rajchman Aleksander, Professeur à l'Université libre de Varsovie.
Ruziewicz Stanisław, Recteur de l'Académie de Commerce de Lwów.
Saks Stanisław, Chargé du cours à l'Université de Varsovie.
Steckel Samuel, Docteur de mathématique.
Schauder Juliusz, Chargé du cours à l'Université de Lwów.
Schreier Józef, Docteur de mathématique.
Sokół-Sokołowski Konstanty.
Sternbach Ludwik, Docteur de mathématique.
Stożek Włodzimierz, Professeur et Doyen de l'Ecole Polytechnique de Lwów.
Tamarkin J. D., Professeur à l'Université de Providence (Brown University).
Vetulani Kazimierz, Professeur de l'Ecole Polytechnique de Lwów.
Waraszkiewicz Zenon, Professeur à l'Université de Łódź.
Weigel Kasper, Professeur de l'Ecole Polytechnique de Lwów.
Weinlös Sala, Docteur de mathématique.
Wilk Antoni, Docteur en philosophie.
Wilkosz Witold, Professeur à l'Université de Cracovie.
Zalcwasser Zygmunt, Professeur à l'Université libre de Varsovie.
Zaremba Stanisław, Professeur d'honneur de l'Université de Cracovie.

LES PERTES DE LA MATHÉMATIQUE POLONAISE PENDANT LA GUERRE

Outre les pertes personelles, la Mathématique Polonaise subit des graves pertes materielles.

En train de la germanisation de l'Université de Poznań et par l'ordre des directeurs allemands de l'Institut Mathématique (M. Deuring et E. Svenson) tous les livres polonais furent détruits en 1939 de même que tous les manuscrits et documents qui se trouvaient à l'Institut.

La population de Poznań étant forcé de quitter leur ville, presque tous les membres de la Section de Poznań ont perdu leurs bibliothèques privées.

Le 1 Septembre 1942 la Bibliothèque du Séminaire Mathématique de l'Université de Varsovie fut détruite par le feu.

Au cours des mois août — décembre 1944, les troupes allemandes ont chassé les habitants de Varsovie et brulé méthodiquement la ville. Presque toutes les bibliothèques privées ont péri dans le feu et les mathématiciens de Varsovie ont perdu les manuscrits contenant la plupart de leurs résultats obtenus pendant la guerre.

Les bibliothèques de Poznań, en particulier la bibliothèque de l'Université de Poznań ont été pour la plupart détruites pendant le siège de la ville en 1945.

Comme les bâtiments universitaires ont été occupés par les autorités administratifs allemandes, les Instituts Mathématiques de l'Université de Cracovie et de l'Académie des Mines à Cracovie ont perdu ca. 10% de ses bibliothéques et presque le total de ses ameublements.

Les éditions polonaises mathématiques ont été pour la plupart détruites pendant l'occupation allemande.

Il est difficile d'apprecier les pertes que la mathématique polonaise a subit à cause de la fermeture pendant l'occupation allemande non seulement des universités polonaises, mais aussi de toutes les écoles secondaires. La suspension de toute activité éditoriale scientifique et l'interruption de toutes les relations scientifiques avec l'étranger aggravèrent encore la situation dans laquelle la mathématique polonaise se trouvait.

Dans cette grave situation les mathématiciens étrangers, sont venus au secours, en envoyant une grande quantité de

livres, de périodiques, de tirages à part. Ces dons précieux sont parvenus où bien annoncés de la part des mathématiciens de l'Angleterre, du Canada, des Etats Unis, de la France, de l'Italie, des pays Scandinaves, de la Suisse, de U. R. S. S. etc. Les mathématiciens polonais garderont une vive réconnaissance pour cette noble action.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES DES SECTIONS

SECTION DE CRACOVIE

2. X. 1945. Leja F. *Sur l'approximation des fonctions par des polynomes.*

9. X. 1945. Bielecki A. *Une condition nécessaire et suffisante d'unicité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires.*

Soit $y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, un système d'équations, les membres droits étant continus dans un domaine D, $a \leqslant x \leqslant b$, $e_i \leqslant y_i \leqslant d_i$. Soit $C: y_i = \varphi_i(x)$ une solution de ce système définie dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$. Pour qu'il n'existe aucune autre solution $y_j = \psi_i(x)$ issue du point $a, \varphi_1(a), \varphi_2(a), \dots, \varphi_n(a)$ et définie dans un intervalle $a \leqslant x \leqslant \beta$, $\beta \leqslant b$ il faut et il suffit qu'il existe un continu E satisfaisant aux conditions suivantes:

1) E est homéomorphe à un cône;

2) E est contenu dans un domaine $a \leqslant x \leqslant b$, $|y_i - \varphi_i(x)| \leqslant \varepsilon$, ε étant un nombre positif arbitrairement choisi, et possède un seul point commun avec l'hyperplan $x = a$; la courbe C est comprie dans l'intérieur de E et il existe un cône contenu dans E dont le sommet est situé sur l'hyperplan $x = a$;

3) toute charactéristique $y_i = \chi_i(x)$ du système en question issue d'un point $c, \chi_i(c)$ appartenant à la frontière du E pénétre dans l'intérieur de E et ne contient pas d'autres points frontiers pour $x > c$.

Il est possible de construire le continu E de telle façon que la portion de sa frontière contenue dans l'intérieur du domaine D soit une surface regulière de classe C^m, $m = 1, 2, 3, \dots$ Ce résultat se conserve si l'on remplace le système d'équations différentielles ordinaires par une équation au paratingent d'un type envisagé par M. S. K. Zaremba (*Sur les équations au paratingent*, Bull. des Sc. Math. (2), LX, mai 1936).

16. X. 1945. Steinhaus H. *Sur les jeux alternatifs.*

Une *partie d'un jeu alternatif* est, par définition, une suite $\{p_n\}$ des „positions", dont celles à indice pair sont dites *blanches* et les autres *noires*. Les *règles du jeu* attribuent à toute position p_n d'une partie un ensemble

$S(p_n)$ de positions, dites admissibles, dont la position p_{n+1} est un élément. Une partie aboutit à p_n lorsque $S(p_n)$ est vide; la *victoire* est alors aux Blancs ou aux Noires suivant que n est impair ou pair; les parties infinies s'appellent *remises*. Une méthode des Blancs, dite pour abréger *méthode blanche*, est, par définition, toute fonction $M(p)$ attribuant à chaque position blanche un élément de $S(p)$; la notion de la *méthode noire* est analogue. Une méthode blanche est *avantageuse* ou *victorieuse* suivant qu'elle engendre pour les Blancs une partie victorieuse ou remise ou bien une partie toujours victorieuse. Le jeu est *injuste* lorsque ses règles comportent l'existence d'une méthode victorieuse pour l'une des deux couleurs (qui est alors nécessairement fixe). Le jeu est *vain* lorsque ses règles comportent l'existence d'une méthode avantageuse pour les Blancs aussi bien que d'une autre pour les Noirs.

L'auteur démontre le théorème suivant: *tout jeu alternatif est soit injuste, soit vain.*

En particulier, le jeu des échecs est donc soit *a priori* victorieux pour une coleur (toujours la même), soit *a priori* conduisant toujours à la remise. Ce n'est qu'à cause de sa complexité qu'on ignore encore: 1⁰ lequel des deux cas se présente pour lui, 2⁰ si c'est le premier, laquelle des deux couleurs est celle victorieuse a priori, 3⁰ dans les deux cas, en quoi consiste la méthode respective à suivre.

[L'auteur s'empresse de remarquer qu'après avoir trouvé les résultats ci-dessus, il s'est convaincu que ces résultats se trouvent implicitement dans un travail de M. Laszló Kalmár, Acta Szeged, 1928].

Ważewski T. *Une évaluation du module des déterminants.*

23. X. 1945. Ważewski T. *Une condition de compacticité des ensembles des fonctions.*

Orlicz W. *Sur les fonctions continues sans dérivées* [A paraître dans le vol. 34 de Fundamenta Mathematicae].

30. X. 1945. Sierpiński W. *Sur une propriété des nombres cardinaux.*

Sierpiński W. *Un théorème sur les nombres ordinaux.*

Szarski J. *Sur un problème de caractère intégral relatif à l'équation* $\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$ *définie dans le plan tout entier.* [Ann. Soc. Pol. de Math., vol. XIX].

6. XI. 1945. St. Gołąb. *Sur la généralisation d'une formule de Lancret concernant l'uniformisation des équations de Frenet.* [Ann. Soc. Pol. de Math., vol. XVIII, pp. 129—133].

Bielecki A. *Sur un problème de l'interpolation.*

Considérons un système de nombres $c_{i,n}$ appartenant à l'intervalle fermé [0, 1] et un système de fonctions $P_{i,n}(x)$ définies dans cet intervalle, où $i=1,2,3,\ldots,n$, $n=1,2,3,\ldots$, $c_{i,n}\neq c_{j,n}$ pour $i\neq j$. La suite de fonctions

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_{i,n})P_{i,n}(x), \qquad n=1,2,3,\ldots$$

converge uniformément vers $f(x)$ pour toute fonction $f(x)$ continue dans [0, 1], si les trois conditions suivantes sont satisfaites:

1) La suite

$$P_n(x)=\sum_{i=1}^{n} P_{i,n}(x), \qquad n=1,2,3,\ldots$$

tend uniformément vers 1 dans [0, 1].

2) Quel que soit l'intervalle fermé $[a, b]$ contenu dans [0, 1], la suite

$$\sum_{[a,b]} P_{i,n}(x), \qquad n=1,2,3,\ldots,$$

où la somme est étendue à tous les indices i pour lesquels $c_{i,n}$ appartient à l'intervalle $[a,b]$, tend uniformément vers 0 dans chaque intervalle extérieur à $[a, b]$ et contenu dans [0, 1].

3) Il existe un nombre $M>0$ tel qu'on a dans tout l'intervalle [0, 1] et pour chaque valeur de l'indice n

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i,n}(x)<M.$$

Ce théorème est une généralisation d'un théorème de M. F. Leja (Ann. Soc. Pol. de Math., vol. XVIII, pp. 123—128).

13. XI. 1945. **Krygowski Z.** *Sur les intégrales hyper-elliptiques canoniques liées aux fonctions theta et sur les dévelopements des intégrales hyper-elliptiques en séries trigonométriques.*

20. XI. 1945. **Mostowski A.** *Une contribution au problème de la décision.*

On dit qu'une théorie mathématique est *résoluble*, s'il existe un procédé fini permettant de reconnaître, si une proposition donnée de cette théorie est vraie ou fausse. L'auteur a donné quelques exemples des théories résolubles et non-résolubles. Parmi ces derniers exemples un semble d'être nouveau: celui de la théorie d'addition et de multiplication des entiers complexes de Gauss. L'irrésolubilité de cette theorie se démontre par la méthode inventée par M. K. Gödel et appliquée par lui à la théorie d'addition et de multiplication des entiers ordinaires (cf. Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 38 (1931), pp. 173—198, théorème VII).

20. XI. 1945. Orlicz W. *Une généralisation du théorème de Cantor-Lebesgue.*

Un ensemble B de nombres réels d'intervalle (a,b) est dit *base rationelle* si l'on peut représenter tout nombre réel x dans la forme $x=r_1x_1+r_2x_2+\ldots+r_kx_k$, où les r_i sont des nombres rationels et x_i appartiennent à B (d'ailleurs cette représentation ne doit pas être unique).

Deux fonctions réelles $f(x)$, $g(x)$ s'appellent *linéairement indépendantes dans l'intervalle* (a,b) *au sens fort* si quels que soient p,q réels ne s'annulant pas simultanément la fonction $pf(x)+qg(x)$ s'annule dans un ensemble au plus dénombrable.

L'auteur démontre le théorème suivant qui généralise le théorème de Cantor-Lebesgue.

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de période 1, linéairement indépendantes au sens fort dans l'intervalle $(0,1)$ et n'admettant qu'une infinité au plus dénombrable de points de discontinuité; soit, de plus, $\omega_1, \omega_2, \ldots$ une suite de nombres réels tendant vers $+\infty$. Dans ces hypothèses, la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_nf(\omega_nx)+b_ng(\omega_nx))$$

dans la base rationelle $B\subset(0,1)$ entraîne $\lim_{n\to\infty} a_n=0, \lim_{n\to\infty} b_n=0$. Des exemples simples montrent que les hypothèses concernant les fonctions $f(x)$, $g(x)$ sont essentielles dans l'énoncé de ce théorème.

Soit $f(x)$ une fonction de Baire; désignons par $m_Bf(x)$ le plus petit nombre k tel que l'inégalité $f(x)>k$ a lieu dans un ensemble au plus de I catégorie de Baire. On a ces théorèmes:

Si $f(x)$ est une fonction de Baire périodique et si ϑ_i sont des nombres réels arbitraires, on a pour tout x, exception faite d'un ensemble borelien de I catégorie de Baire,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(\omega_nx+\vartheta_n)=\max_B f(x).$$

Si $f(x)$ est une fonction continue (fonction de Baire), on a pour tout x, exception faite d'un ensemble H_σ (un ensemble borelien de I catégorie de Baire), la relation

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_nf(\omega_nx+\vartheta_n)| = \max_B |f(x)| \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|,$$

le cas où un facteur à droite s'annule et l'autre est égal à $+\infty$ étant exclu.

27. XI. 1945. Ważewski T. et Szarski J. *Sur une relation entre le module d'un déterminant complexe et son déterminant réel associé. Application à la théorie des formes hermitiennes et à celle des matrices complexes.* [Ann. Soc. Pol. de Math., vol. XX].

Ważewski T. *Une démonstration directe d'un théorème sur la signature d'un polynôme.*

4. XII. 1945. Knaster B. *Sur les ensembles connexes.* [Cf. Fund. Math. 33 (1945), pp. 308—313].

Ważewski T. et Szarski J. *Sur l'unicité des intégrales d'une équation de Clairaut, modifiée.*

Les auteurs démontrent le théorème suivant: Considérons l'équation différentielle ordinaire de la forme

(1) $$y' = f(x,y)$$

et supposons que la fonction $f(x;y)$ soit continue dans un rectangle.

Théorème: Si par tout point du rectangle il passe une droite qui est l'intégrale de l'équation (1) dans le rectangle, alors l'équation (1) n'admet pas d'autres intégrales dans ce rectangle que ces droites-intégrales.

8. I. 1946. Leja F. *Sur les polynômes de Tschebycheff et la fonction de Green.* [Ann. Soc. Pol. de Math., vol. XIX (1946), pp. 1—6].

Biernacki M. *Sur une inégalité dans l'espace à $m \geqslant 3$ dimensions.*

F. Leja communique la résolution par M. M. Biernacki du problème suivant (posé par F. Leja): l'inégalité

(1) $$\sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{|PP_k|}{|P_iP_k|} \geqslant 1,$$

où P est un point variable et $P_0, P_1, \ldots, P_n$ un système des points différents quelconques fixes situés dans l'espace cartésien E_m à m dimensions, est vraie dans le cas $m=2$ (ce qui résulte de la formule d'interpolation de Lagrange). Est-elle vraie dans le cas $m \geqslant 3$?

M. Biernacki a donné la réponse négative. L'inégalité (1) peut cesser d'être vraie si $m \geqslant 3$.

15. I. 1946. Nikliborc W. *Sur le problème des trois corps, I-re partie.*

22. I. 1946. Ważewski T. *La méthode des approximations successives dans les espaces abstraits.*

29. I. 1946. Kozieł K. *Differential formulae of spherical polygonometry.*

In the problems of spherical astronomy, which lead to the solution of polygons on the sphere, formulae are needed, giving the changes of certain elements of these polygons in dependence on the changes of the remaining

elements. In order to get such formulae the lecturer first differentiates the product of ordinary and quaternion rotational cracovians, on introducing elementary skew cracovians s_p, s_q and s_r, corresponding to the ordinary rotational cracovians p, q and r, and elementary skew cracovians s_P, s_Q and s_R, corresponding to the quaternion rotational cracovians P, Q and R. The lecturer differentiates next by means of the obtained formulae the fundamental equation of Banachiewicz for the solution of a spherical polygon (n-angle) and obtains as result two types of cracovian differential formulae of spherical polygonometry. Finally the lecturer presents differential formulae of spherical trigonometry and tetragonometry as applications of the just derived general formulae.

5. II. 1946. Nikliborc W. *Sur le problème des trois corps, II-ème partie.*

19. II. 1946. Ważewski T. *Sur les racines caractéristiques d'une matrice*; a) *remarques de l'auteur*; b) *résultats de Mlle Zofia Szmydt.*

26. II. 1946. Ważewski T. *Une démonstration d'un théorème de Frobenius concernant les matrices à l'aide des équations différentielles.*

Bielecki A. *Sur un problème d'interpolation.*

Remarques sur les rapports entre certains théorèmes de H. Hahn (Math. Ztschr., 1918) concernant le problème d'interpolation et les théorèmes analogues trouvés récemment par MM. F. Leja (Ann. Soc. Pol. de Math., vol. XVIII, p. 123) et A. Bielecki (ce volume, séance du 2. X. 1945).

19. III. 1946. Zawirski Z. *Sur la logique de Brouwer-Heyting* [Kwartalnik Filozoficzny, vol. 16 (1946), pp. 165—222].

14. V. 1946. Nikodym O. *Sur les suites des intégrales abstraites.*

21. V. 1946. Gołąb St. *Sur les objets géométriques de la 1-ère classe* [Ann. Soc. Pol. de Math., vol. XIX (1946), pp. 7—35].

28. V. 1946. Choquet G. *L'isométrie des surfaces.*

4. VI. 1946. Zahorski Z. *Sur les courbes de Jordan susceptibles d'une représentation paramétrique partout dérivable.*

Soit B_t l'ensemble de points t, pour lesquels $\sum_{m=1}^{n} x'_m(t)^2 = 0$. Un changement du paramètre $t = t(T)$ s'appelle *non-essentiel*, lorsque la fonction $t(T)$ est

continue et croissante (au sens stricte). La représentation paramétrique donnée $x_m = x_m(t)$ soit telle qu'il n'existe pas d'intervalles dans lesquels toutes les fonctions $x_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots, n$ soient constantes. Une telle représentation particulière peut être obtenue d'une représentation quelconque à l'aide d'un changement (essentiel) du paramètre. L'auteur démontre les théorèmes suivants:

1. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une représentation $x_m = X_m(T)$ partout dérivable, douée des dérivées bornées et telle que $|B_T| = 0$, consiste en ce qu'il existe une représentation $x_m = x_m(t)$ où les fonctions $x_m(t)$ soient de classe VB (c.-à-d. que la courbe soit rectifiable).

2. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une représentation $x_m = X_m(T)$ partout dérivable, douée des dérivées finies et telle que $|B_T| = 0$, consiste en ce qu'il existe une représentation $x_m = x_m(t)$ où les fonctions $x_m(t)$ soient de classe VBG*.

3. La condition du théorème 2 équivaut à la condition que la courbe soit une projection d'une courbe $x_m = x_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots, n+1$ située dans l'espace à $n+1$ dimensions et jouissant des propriétés J et M.

(Une courbe $x_m = x_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots, k$, située dans l'espace k-dimensionel, jouit de la propriété M, lorsque à tout point t_0 (à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable de points) il existe un $\varepsilon(t_0)$ tel que: a) pour tout $t \in (t_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon) - [t_0]$ on ait

$$\sum_{m=1}^{k} (x_m(t) - x_m(t_0))^2 > 0,$$

b) il existe deux cônes de rotation (à k-dimensions), coaxiaux, de sommet au point $x_m(t_0)$, $m = 1, 2, \ldots, k$, et tels que l'image de $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) - [t_0]$ soit situéé à l'intérieur de ces cônes.

Une courbe jouit de la propriété J, lorsque l'ensemble de points de multiplicité dénombrable est au plus dénombrable, de multiplicité $\mathfrak{c}$ — vide).

La représentation $X_m(T)$ dans les théorèmes 1, 2, 3 se déduit de la représentation donnée $x_m(t)$ par un changement non-essentiel du paramètre.

L'auteur a trouvé les théorèmes 1 et 3 sans la condition $|B_T| = 0$ en X. 1940, avec cette condition en IX. 1943.

18. VI. 1946. Borsuk K. *La théorie des rétractes.*

25. VI. 1946. Nikodym O. *Sur une généralisation de la notion de fonction.*

Ulam J. *General mean and its applications.*

We consider a real and univalent function of n real variables, $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ which we suppose to be:

1) continuous (with respect to the set of a_i's),
2) strictly monotone (with respect to every a_i),
3) symmetric (with respect to every pair of a_i's),

all that in a certain n-dimensional cube $I^{(n)}$. The function $\Phi(a)=\varphi(a,a,\ldots,a)$, obtained by putting $a_1=a_2=\ldots=a_n=a$, fulfils the conditions 1) and 2) in the interval I. It is easy to prove, that $\{\varphi\}=\{\Phi\}$, i. e. that the images of $I^{(n)}$ and I, obtained, by φ and Φ, respectively, coincide. The function Φ^{-1}, inverse to Φ (such function exists, in value of 1) and 2)), is, therefore, defined on the set $\{\varphi\}$. We construct

$$(1) \qquad M_\varphi(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\Phi^{-1}[(a_1,a_2,\ldots,a_n)].$$

It is evident, that M_φ fulfils the condition 1) and 3); it is an increasing (in the strict sense) function of every a_i, and, besides: $M_\varphi(a,a,\ldots,a)=a$. Are at least two of the a_i's different, then

$$\min(a_1,a_2,\ldots,a_n)<M_\varphi(a_1,a_2,\ldots,a_n)<\max(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

that is, the function M_φ is a mean, the general mean in question.

By a suitable choice of φ we obtain various particular means; so $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i$ gives, as M_φ, the arithmetic, $\varphi=\prod_{i=1}^{n}a_i$ the geometric, $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}$ the harmonic mean, etc.

The application of the general mean M_φ to the notion of convexity of functions is next considered, a function $f(x)$ being called φ-convex in (a,b) if the inequality

$$(2) \qquad f(M_\varphi(a_1,a_2))\leqslant M_\varphi(f(a_1),f(a_2))$$

is fulfilled for $a_1,a_2 \in (a,b)$. On the hypothesis, that the functional equation:

$$f(M_\varphi(a_1,a_2))=M_\varphi(f(a_1),f(a_2))$$

admits a continuous solution, $n_\varphi(x)$, it is proved, that through any two points passes one and only one curve $n_\varphi(x)$.

Then, if $f(x)$ satisfies (2), the theorems are valid:

1) The arc of $f(x)$, connecting any two points, „lies below" or is identical with (in the case of equality in (2)) the arc of $n_\varphi(x)$, joining these points.

2) Through any point of $y=f(x)$ there passes at least one curve $n_\varphi(x)$, that has no other point in common with $y=f(x)$.

These two properties of a φ-convex function with respect to $n_\varphi(x)$ are obviously a generalization of the properties of a function, convex in the ordinary sense, with respect to the straight line, viz. the chorde (the 1-st) and the „Stützgerade" (the 2-nd property). In fact, for $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i$ we have $n_\varphi(x)=ax+b$, and the φ-convexity becomes the usual convexity. The second property is of special interest. The „Stützgerade" being, in most cases, identical with the tangent, we can put forward the problem of finding for a given φ a functional operation, that would put in correspondence to every point of every function (fulfilling certain conditions) a function $n_\varphi(x)$. For $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i$ the operation in question is $\frac{d}{dx}f(x)$, and the function $n_\varphi(x)$, put in correspondence, is the tangent, $n_\varphi(x)=ax+b$.

SECTION DE POZNAŃ

Il nous est impossible de donner un compte-rendu des séances d'avant-guerre outre les titres de quelques conférences qui ont eu lieu entre 1. I. 1939 et 1. IX. 1939.

Krużycka K. *Sur les courbes d'épaisseur constante.*

Butlewski Z. *Le problème à limites pour le système des équations différentielles linéaires.*

Biernacki M. *Sur les zéros des intégrales des équations différentielles.*

Ślebodziński W. *Sur la géométrie textile.*

Seipelt L. *Sur la résolution des équation du 5-eme degré.*

Orlicz W. *Sur les fonctions continues sans dérivées.*

Séances d'après-guerre:

8. IV. 1946. Witkowski J. *Impressions de la conférence des astronomes à Copenhague.*

25. VI. 1946. Szczeniowski S. *Théories modernes de la structure du noyau atomique.*

SECTION DE WROCŁAW

20. X. 1945. Ślebodziński W. *Sur la géometrie textile.*

M. Blaschke a montré (W. Blaschke u. G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, 1938, p. 164) qu'on peut associer d'une facon invariante à chaque réseau de trois familles de lignes d'un plan une métrique conforme et un parallélisme analogue à celui de Levi-Civita. Malheureusement ce parallélisme n'a aucun lien avec le parallélisme déduit de la métrique conforme. Or, on peut démontrer qu'avec le réseau sus-dit une connexion affine peut être liée d'une façon invariante, connexion dont le groupe fondamental est donné par les formules $\bar{u}=ku+a$, $\bar{v}=kv+b$. Le parallélisme défini par cette connexion est identique avec le parallélisme de M. Blaschke. Les lignes du réseau sont des géodésiques de la connexion; chaque géodésique coupe les lignes d'une famille du réseau sous un angle constant. La somme des angles d'un triangle formé par trois géodésiques est égale à π.

Une propriété analogue peut être montrée dans le cas d'un réseau de quatres familles de surfaces d'un espace à 3 dimensions.

20. X. 1945. Marczewski E. *Remarques sur l'équivalence des classes d'ensembles.*

Deux classes K_1 et K_2 de sous-ensembles de l'intervalle $I = \langle 0, 1 \rangle$ s'appellent *équivalentes* lorsqu'il existe une transformation biunivoque de I en soi qui transforme K_1 en K_2.

M. W. Sierpiński a démontré à l'aide de l'hypothèse du continu que la classe des ensembles de mesure nulle et celle des ensembles de I-ère catégorie sont équivalentes[1]).

Considérons la condition suivante, qui est remplie par les classes N mentionnées tout-à-l'heure:

(*) Il existe une classe $Q \subset N$ de puissance du continu, telle que 1° pour chaque $E \in N$, il existe un ensemble H tel que $E \subset H \in Q$ et 2° pour chaque $K \in Q$, il existe un ensemble indénombrable $N \in Q$, disjoint de K.

Dans les cas cités plus haut, on peut considérer comme Q la classe des ensembles G_δ de mesure nulle resp. la classe des ensembles F_σ de I-ère catégorie.

En généralisant le résultat et le raisonnement de M. Sierpiński, on obtient *à l'aide de l'hypothèse du continu* le théorème suivant:

Soit K_1 une classe de sous-ensembles de I héréditaire, dénombrablement additive et satisfaisant à la condition (*). *Pour qu'une classe K_2 de sous-ensembles de I soit équivalente à K_1, il faut et il suffit qu'elle soit héréditaire, dénombrablement additive et qu'elle satisfasse à la condition* (*).

(En d'autres mots: l'hérédité, l'additivité dénombrable et la condition (*) caractérisent complètement la classe des ensembles de mesure nulle au point de vue de la théorie générale des ensembles).

7. XII. 1945. Steinhaus H. *Sur les jeux alternatifs.*

11. I. 1946. Marczewski E. *Sur l'isomorphie des relations et l'homéomorphie des espaces* [Cf. Section de Varsovie, séance du 21. IX. 1945].

18. I. 1946. Steinhaus H. *Sur le mouvement d'un essaim de points abandonné à l'intérieur d'un cube* [C. R. de la Soc. des Sciences et des Lettres de Wrocław, séance du 23 V. 1946].

15. II. 1946. Knaster B. *Sur le problème du partage pragmatique de H. Steinhaus.*

Le mode usuel de partage en 2 parties, qui s'exprime dans la règle „l'un divise et l'autre choisit", a la propriété suivante: chacun des deux participants peut s'assurer une partie égale (selon lui) au moins à la moitié de l'objet à partager, à savoir — celui qui divise, par une division en parties

---

[1]) Fund. Math. 22 (1934), p. 276 et *Hypothèse du continu*, Monogr. Matem. 4 (1934), p. 77.

(qu'il estime) égales, et celui qui choisit, par le choix de la partie (qu'il estime) non moindre de l'autre.

Cette propriété a été formulée par M. Steinhaus dans une lettre à moi de 1944 et suivie du problème: en appelant la règle en question *procédé de partage* et la méthode à suivre pour les participants *méthode efficace*, existe-t-il *pour tout entier $n \geqslant 2$ un procédé de partage tel que chacun des n participants dispose, en s'y conformant, d'une méthode efficace qui lui assure une partie égale (selon lui) au moins à $1/n$ de l'objet à partager?*

M. Steinhaus qualifie *pragmatique* un tel procédé de partage. Il jouit par définition de la propriété importante d'offrir à tout participant, pourvu qu'il suive la méthode efficace, l'indépendance complète des fautes d'appréciation, des ruses et même des complots de ses partenaires, tout cela d'une manière automatique, sans aucune intervention du dehors (p. ex. de la part d'une instance judiciaire ou autre).

La réponse au problème est affirmative. La solution proposée par S. Banach et moi comporte comme procédé de partage une libre détermination par l'un des participants d'une partie de l'objet, chacun des autres ayant droit de la corriger ensuite à son gré, à savoir en diminuant tour à tour ce qui en reste après la diminution apportée par son prédécesseur; le dernier correcteur reçoit la partie en question dans son état final (et à défaut des correcteurs, elle est à celui qui l'avait déterminée); le procédé continue par le partage analogue de l'objet, désormais dépourvu de la partie enlevée, entre les $n-1$ participants qui restent; on arrive ainsi par recurrence au cas banal de 2 participants, ce qui achève la définition du procédé de partage. Dans cette solution, la méthode efficace est, pour celui qui détermine une partie, de la déterminer non inférieure à $1/n$ (selon son estime) et, pour chacun des autres, de la diminuer, s'il y a lieu, de façon qu'elle devienne égale à $1/n$ (d'après l'appréciation du diminueur). La démonstration que la solution satisfait aux conditions du problème est triviale. On ignore si cette solution est unique.

Il est à ajouter que, dans le cas où au moins 1 correcteur se présente, elle se laisse améliorer d'une façon un peu paradoxale. J'ai montré qu'une légère modification du procédé de partage permet d'assurer dans ce cas à chacun des n participants $P_1, P_2, \ldots, P_n$ une partie *plus grande que* $1/n$ (selon son estime) de l'objet à partager. On n'a qu'à mettre de côté l'excès ε retranché par le dernier correcteur P_i de la partie p_{i-1} qui vient de lui être transmise par son prédécesseur P_{i-1}, et de répartir cet excès, divisé au préalable de n'importe quelle manière en n parties non nulles $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, entre tous les participants à l'issue du partage. En effet, après que la partie $p_i = p_{i-1} - \varepsilon$, se trouve assignée, tout comme plus haut, à P_i, comme égale (selon lui) au moins à $1/n$, il ne reste que $n-1$ participants, pour chacun desquels, vu l'hypothèse que P_i était le dernier correcteur, l'objet, dépourvu de la partie p_{i-1} — et non plus de p, comme auparavant — a la valeur au moins égale à $(n-1)/n$, ce qui permet d'en continuer le partage entre les $n-1$ participants selon le procédé antérieur jusqu'à l'acte supplémentaire de la répartition de l'excès ε. Finalement, P_i recevra

donc $p_i+\varepsilon_i=\frac{1}{n}+\varepsilon_i>\frac{1}{n}$ (selon lui) pour tout $i=1,2,\ldots,n'$, ce qui achève la démonstration.

On remarquera que tous les raisonnements qui précèdent restent vrais en y supprimant dès le début les expressions mises entre parenthèses.

Tout partage pragmatique est libre de l'hypothèse que l'appréciation de la valeur d'une partie donnée de l'objet de valeur 1 soit la même chez tous les participants. Cette propriété du partage pragmatique trouve son expression particulièrement manifeste dans le langage de la Théorie de la mesure, en lequel le problème de M. Steinhaus a été traduit par S. Banach.

Soit E un ensemble arbitraire qu'il s'agit de décomposer en $n\geqslant 2$ parties disjointes $E_1,E_2,\ldots,E_n$ de mesures respectives $m_1(E_1),m_2(E_2),\ldots,m_n(E)_n$ et telles que l'on ait

(*) $$m_1(E_1)=m_2(E_2)=\ldots=m_n(E_n)\geqslant 1/n,$$

les seules hypothèses sur les mesures m_i étant les suivantes:

(1) $$m_1(E)=m_2(E)=\ldots=m_n(E)=1,$$

(2) $m_1(X),m_2(X),\ldots,m_n(X)$ *où* $X\subset E$ *ne s'annulent que simultanément.*

La solution de ce problème („procédé de décomposition" et „méthode efficace") est analogue. Et encore, le même artifice permet de la mettre sous la forme du théorème suivant, dont l'énoncé pas plus que la démonstration (évidente après ce qui précède) ne contiennent d'éléments antropomorphes:

Dans les hypothèses (1), (2) *et*

(3) $m_i(E_i)\neq m_j(E_i)$ *pour un couple d'indices* $i\neq j$,

il existe une décomposition de E *en parties disjointes* $E_1, E_2,\ldots,E_n$ *telle que*

(**) $m_i(E_i)>1/n$ *pour tout* $i=1,2,\ldots,n$.

Il n'est pas difficile de donner au partage pragmatique une *application pratique* en construisant un schéma approprié aux besoins de cas.

Steinhaus H. *Remarques sur le partage pragmatique.*

Tout *partage pragmatique*[1]) est un *jeu équitable*, c.-à-d. qui conduit automatiquement au résultat équitable lorsque les joueurs font l'usage de leurs droits, c. à d. se servent de leurs méthodes efficaces. Si l'un (ou plusieurs) d'eux ne s'en sert pas, ses actes ne peuvent causer de préjudice à ceux qui s'en servent.

La solution du problème du partage pragmatique entre $n\geqslant 2$ participants, proposée par S. Banach et B. Knaster, se laisse généraliser aux parties inégales, mais rationnelles. Le problème de démontrer l'impossibilité d'un partage pragmatique en parties irrationnelles reste ouvert, même pour $n=2$.

---

[1]) Voir la communication qui précède.

La solution de S. Banach et B. Knaster donne lieu à un jeu qui peut être réalisé à l'aide des jetons égaux, mais de différente valeur, cette dernière étant marquée sur leur face du dessous (invisible). Le jeu consiste à soumettre un tas de tels jetons, mis en désordre sur une table, au partage pragmatique entre les joueurs suivant le mode décrit par ces auteurs.

22. II. 1946. Steinhaus H. *Evaluation du volume des troncs de bois.*

En admettant que les troncs côniques ont r, R comme rayons des bases et que $\frac{1}{2}R \leqslant r \leqslant R$, on obtient la formule approchée

(1) $$V^* = 0.8\, ws^2$$

pour le volume V, w étant la longueur du tronc, $s = R + r$ le diamètre au milieu. L'erreur de (1) ne surpasse pas $\pm 2^0/_0$. La meilleure formule utilisant les tables usuelles employant le coefficient $\pi/4$ est celle que l'on obtient en prenant au lieu de s le diamètre du tronc à l'endroit qui divise la longueur en raison $\alpha : 1-\alpha$ avec $\alpha = 0.47723 \left(= \frac{48-\sqrt{42}}{87}\right)$; l'erreur ne surpasse pas $6^1/_4$ pour mille. En abandonnant $\pi/4$, on peut améliorer ce résultat; la formule:

(2) $$V = 0{,}7818\, ws_1^2,$$

où s_1 correspond à $\alpha = 2 - \sqrt{7/3} = 0.47247$ est exacte à $\pm 4.6^0/_{00}$ près.

Quand l'hypothèse $r \geqslant \frac{1}{2}R$ est inadmissible, la formule

(3) $$V = \frac{\pi}{4}\, ws^2 + \varrho w^3$$

avec une constante convenable ϱ permet de corriger le volume total d'un ensemble de troncs de la même espèce, calculé par les tables, en faisant la somme des cubes des longueurs; ϱ résulte des mesures répetées de R, r, w:

$$\varrho = \frac{\pi}{12k^2}, \qquad k = \frac{w}{R-r}.$$

Ślebodziński W. *Quelques remarques sur la représentation des vecteurs covariants et contravariants.*

1. III. 1946. Marczewski E. et Hartman S. *Sur la mesure relative de M. Steinhaus.*

8. III. 1946. Steinhaus H. *Sur quelques indices géographiques* [A paraître dans *Przegląd Geograficzny*, Wrocław].

10. III. 1946. Gołąb S. *La réduction des objets géometriques de la première classe aux objets du type Δ.*

5. IV. 1946. **Knaster B.** *Sur les transformations continues des sphères en hyperplans de dimension inférieure.*

L'auteur communique quelques résultats partiels concernant l'existence sur la sphère des systèmes finis de points isométriques à un système donné d'avance et donnant la même image.

26. IV. 1946. **Marczewski E.** *Sur les mesures à deux valeurs et les idéaux premiers dans les corps d'ensembles.*

Une fonction non négative $m(E)$ d'ensemble, définie dans un corps K de sous ensembles d'un ensemble fixé X s'appelle *mesure* dans X lorsqu'elle est additive. Une mesure s'appelle *dénombrablement additive rel. à* K lorsqu'on a

$$m(E_1+E_2+\ldots)=m(E_1)+m(E_2)+\ldots,$$

pourvu que

$$E_n\in K, \quad E_1+E_2+\ldots\in K, \quad E_iE_j=0 \quad \text{pour} \quad i\neq j.$$

Chaque somme d'un nombre fini d'intervalles et d'un ensemble fini s'appelle *ensemble élémentaire*. Chaque ensemble qui est somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble au plus dénombrable et dont le complémentaire est de la même forme, s'appelle *quasi-élémentaire*. Les classes d'ensembles élémentaires et des ensembles quasi-élémentaires contenus dans l'intervalle fermé $I=\langle 0,1\rangle$ seront désignées par $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{Q}$. La classe de tous les sous-ensembles de I sera désignée par $\boldsymbol{U}$.

Définissons maintenant trois fonctions d'ensemble comme il suit:

$\beta_p(E)=1$ lorsqu'on a $p\in E$ et
$\beta_p(E)=0$ dans le cas contraire;
$\gamma_p(E)=1$ lorsqu'il existe un intervalle ouvert $(a,p)\subset E$ et
$\gamma_p(E)=0$ dans le cas contraire;
$\delta_p(E)=1$ lorsqu'il existe un intervalle ouvert $(p,b)\subset E$ et
$\delta_p(E)=0$ dans le cas contraire.

On démontre aisément le

Théorème 1. *Pour chaque* $p\in I$, *les fonctions* β_p, γ_p *et* δ_p *sont des mesures à deux valeurs dans le corps* $\boldsymbol{E}$. *Il n'existe aucune autre mesure à deux valeurs* (0 *et* 1) *dans ce corps.*

Le lemme suivant résulte directement du théorème 1:

Lemme 2. *A l'aide de chaque mesure* μ *à deux valeurs dans le corps* $\boldsymbol{E}$ *qui s'annule pour les ensembles se réduisant à un point, on peut nommer effectivement une décomposition* $I=I_1+I_2+\ldots$ *en ensembles* I_n *de mesure* μ *nulle.*

Ce lemme entraîne directement le

Théorème 3. *Il n'existe dans le corps* $\boldsymbol{E}$ *aucune mesure à deux valeurs dénombrablement additive rel. à* $\boldsymbol{E}$.

A plus forte raison, il n'existe aucune mesure dénombrablement additive à deux valeurs dans le corps des ensembles boreliens dans I. (Cette

remarque embrasse le résultat de M. S. Ulam[1]) d'après lequel il n'existe pas de telle mesure dans le corps U).

On sait qu'il existe dans le corps U une mesure à deux valeurs s'annulant pour tous les ensembles qui se réduisent à un point[2]), mais la démonstration de l'existence n'est pas effective. D'autre part, le théorème 1 permet de définir effectivement toutes les mesures à deux valeurs dans le corps E. Or, en s'appuyant sur un résultat de M. Sierpiński[3]) et sur le lemme 2, l'auteur démontre le

Théorème 4. *A l'aide de chaque mesure à deux valeurs dans le corps* Q, *s'annulant pour les ensembles qui se réduisent à un point, on pourrait nommer effectivement un ensemble non mesurable* (L).

17. V. 1946. Steinhaus H. et Warmus M. *Quelques théorèmes sur les jeux.*

Considérons un jeu où X gagne $f(x,y)$ et Y perd la même somme. Le jeu consiste en ce que la variable x est choisie par X et la variable y par Y, ce choix étant simultané et la fonction $f(x,y)$ étant définie d'avance par les règles du jeu.

Les auteurs démontrent le théorème suivant: Si x_0 est un choix le plus favorable pour X sous la condition que Y a choisi y_0 et si en même temps y_0 est le choix le plus favorable pour Y sous la condition que X a choisi x_0, il existe alors le meilleur résultat du jeu, pouvant être garanti d'avance par X, et ce résultat est égal *à* $f(x_0,y_0)$. De même $f(x_0,y_0)$ est le meilleur résultat du jeu, pouvant être garanti d'avance par Y.

Dans le language de la théorie des fonctions: si

$$(1)\qquad \begin{aligned} \max_x f(x,y_0) &= f(x_0,y_0) \qquad a \leqslant x \leqslant b \\ \min_y f(x_0,y) &= f(x_0,y_0) \qquad c \leqslant x \leqslant d, \end{aligned}$$

alors on a

$$(2)\qquad \max_x [\min_y f(x,y)] = \min_y [\max_x f(x,y)] = f(x_0,y_0).$$

La réciproque est aussi vraie, à savoir: si l'on a

$$\max_x [\min_y f(x,y)] = \min_y [\max_x f(x_1,y)],$$

alors ils existent des valeurs x_0,y_0 tels que les égalités (1) ont lieu.

Warmus M. *Un théorème sur la poursuite.*

Une méthode de la poursuite s'appelle absolument optimale, si elle garantit le temps plus court de la poursuite que tout autre méthode. En désignant par x une méthode de la poursuite, par y une méthode de la fuite, par $f(x,y)$ le temps relatif à ces deux méthodes, on définit „le temps

[1]) Fund. Math. 16 (1930), p. 146.

[2]) Voir p. ex. A. Tarski, Fund. Math. 15 (1930), p. 42.

[3]) Fund. Math. 30 (1938), p. 96.

minimum" garanti par le persécuteur comme $\min_x[\max_y f(x,y)]$ (cf. la note précédente). Une méthode analogue s'applique à la méthode absolument optimale de la fuite.

Supposons que X poursuit Y dans un demi-plan L (p. ex. un bâteau poursuit un autre dans le voisinage d'un bord rectiligne), et que le rapport des vitesses de X et de Y est égal à $q > 1$. Soit $A(t)$ la position de X et et $B(t)$ celle de Y au temps t. Soit encore $K(t)$ le lieu géométrique des points du plan dont les distances de $A(t)$ et de $B(t)$ sont dans le rapport $q:1$ (le cercle d'Appollonius). $K(t)\cdot L$ est alors l'arc de ce cercle contenu dans L.

L'auteur démontre que

a) la méthode absolument optimale de la poursuite pour X est de garder toujours la direction de la droite $A(t)B(t)$;

b) la méthode absolument optimale de la fuite pour Y est de se diriger toujours vers un tel point $M(t)$ de l'arc $K(t)\cdot L$ qui est le plus éloigné de $A(t)$ (et en même temps de $B(t)$);

c) si X et Y se servent tous les deux des méthodes absolument optimales, ils parcourent tous les deux les lignes droites dans la direction du point $M(t)$, qui est dans ce cas constant; $M(t)$ est aussi le point de rencontre de X et de Y.

24. V. 1946. Steinhaus H. *Sur le problème du tarif électrique.*

L'idée du nouveau tarif se résume dans la formule

$$z_2 = k_2\sqrt{T}\cdot\sqrt{\int_0^T f^2(t)dt}, \tag{1}$$

où z_2 désigne le montant à payer, k_2 le prix fondamental, T la période d'acquitement, t le temps et $f(t)$ la puissance prélevée au moment t.

On peut obtenir cette formule de la formule plus générale

$$z_p = k_p T^{\frac{p-1}{p}} \left\{\int_0^T f(t)^p dt\right\}^{1/p}, \tag{2}$$

en substituant à p le nombre 2; la même formule (2) donne pour $p=1$ le tarif ordinaire et pour $p=\infty$ le tarif à maxima, c. à d. où le montant est le produit du prix fondamental par la période T et par le maximum des puissances prélevées au cours de cette période.

Les avantages du tarif ordinaire sont: homogénéité, monotonie, additivité, universalité, insensibilité envers la période, simplicité des compteurs. De ces qualités, quatres premières se retrouvent dans le tarif *quadratique* (1). La cinquième peut être atteint avec approximation suffisante, ou bien, exactement, par une totalisation annuelle des comptes. La construction d'un compteur évaluant l'intégrale du carré de puissance multiplié par la différentielle du temps est aujourd'hui une tâche aisée.

Les nouveaux avantages du tarif quadratique et que n'offre aucun des tarifs employés jusqu'à présent sont: répartition équitable des frais constants, pression exercée sur l'abonné dans le sens de niveler sa courbe

de réception, cette pression étant proportionelle à l'ordonnée de la courbe, enfin, affranchissement du fournisseur d'énergie des contrats individuels (universalité absolue). Vis-à-vis du tarif multiple, il jouit d'élasticité, dont celui est dépourvu, car au lieu d'une fonction rigide de temps, $h(t)$, (formule $z=k\int_0^T h(t)\cdot f(t)dt$) il introduit $f(t)$, c. à d. une fonction toujours adéquate.

L'avantage le plus remarquable du tarif quadratique consiste dans les indications qu'il donne au sujet des capitaux à engager et des clients à chercher; ces indications résultent immédiatement des comptes mensuels présentés aux abonnés.

La conférence a engendré une vive discussion.

Séance tenant, la Section de Wrocław de l'Association d'Eléctriciens Polonais s'est constitué.

31. V. 1946. Orlicz W. *Les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées.*

Soit M_l l'espace linéaire des fonctions mesurables et essentiellement bornées définies dans $\langle a,b\rangle$, dans lequel on a introduit la notion de convergence comme il suit: la suite $x_1(t), x_2(t),\dots$ est dite convergente (l) vers $x_0(t)$ lorsque les fonctions de cette suite sont uniformément essentiellement bornées et convergent asymptotiquement vers $x_0(t)$.

Soit Y un espace de type (B); désignons par E_0 l'ensemble fondamental des fonctionelles linéaires c. à d. un ensemble des fonctionnelles $\eta(y)$ tel qu'il existe des constantes c et C telles que pour chaque $y \in Y$, $\eta \in E_0$ on a

$$\sup|\eta(y)| \geqslant c\|y\| \quad \text{quand} \quad \eta \in E_0,\ \|\eta\| \leqslant C.$$

Nous dirons que l'espace Y jouit de la propriété (Z) lorsque l'inégalité $\|\varepsilon_1 y_1+\varepsilon_2 y_2+\dots+\varepsilon_n y_n\| \leqslant \kappa$, pour $\varepsilon_i=1,0$ et $n=1,2,\dots$ arbitraires, entraîne la convergence de la série $y_1+y_2+\dots$

L'auteur communique quelques contributions supplémentaires aux résultats établis antérieurement (ces Annales XVIII (1945), p. 161), concernant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une opération additive définie dans M_l, dont les valeurs sont des éléments d'un espace Y du type (B) ou (P), soit continue, donc linéaire. On a p. ex. le théorème suivant:

Soit Y un espace du type (B); l'opération $U(x)$ définie dans M_l à contre-domaine dans Y est linéaire lorsque, $\eta(y)$ étant une fonctionnelle arbitraire de E_0, la fonctionnelle $\eta(U(x))$ est linéaire et que, de plus, une des conditions suivantes est satisfaite:

(a) Y est un espace séparable; (b) l'ensemble E_0 est identique à l'espace conjugué avec Y; (c) Y jouit de la propriété (Z).

L'auteur anonce plusieurs applications de ce théorème, comme p. ex.:

1) Pour qu'une fonctionnelle bi-additive $V(x,y)$ soit bi-linéaire dans M_l, il faut et il suffit qu'il existe dans M_l des opérations linéaires $U_1(x;t)$, $U_2(x;t)$

dont les valeurs appartiennent à l'espace (L^1) des fonctions intégrables, telles que

$$V(x,y)=\int_a^b x(t)\cdot U_1(y;t)dt=\int_a^b y(t)\cdot U_2(x;t)dt.$$

2) Soit $k(t,v)$ une fonction mesurable définie dans le carré $a\leqslant t\leqslant b$, $a\leqslant v\leqslant b$. Si, $x(t), y(v)$ étant des fonctions mesurables bornées, les intégrales iterées

$$(*)\qquad \begin{aligned} J_1(x,y)&=\int_a^b\Big(y(v)\int_a^b x(t)k(t,v)dt\Big)dv\\ J_2(x,y)&=\int_a^b\Big(x(t)\int_a^b y(v)k(t,v)dv\Big)dt \end{aligned}$$

existent; on a $J_1(x,y)=J_2(x,y)$.

Ce théorème reste vrai lorsque les intégrales (*) existent, $x(t)$, $y(v)$ n'étant que des fonctions caractéristiques des ensembles mesurables.

7. VI. 1946. Kuratowski C. *Sur l'application de l'homotopie au problème des points invariants.*

L'auteur établit en termes de l'homotopie une formule analogue à celle de la topologie algébrique concernant le nombre algébrique des points invariants (Alexandroff-Hopf, *Topologie*, Chap. XIV, § 3). Elle est applicable aux rétractes absolus de voisinage situés sur le plan, l'ensemble des points invariants étant fini ou infini.

Ces résultats paraîtrons dans le vol. 34 des Fundamenta Mathematicae.

14. VI. 1946. Marczewski E. *Isomorphie des mesures et arithmétisation des variables aléatoires.*

D'après M. Kolmogoroff (*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin 1933, p. 20), chaque variable aléatoire est une fonction définie dans un ensemble abstrait X, prenant des valeurs réelles et mesurable par rapport à une mesure dénombrablement additive μ définie dans X.

L'auteur démontre des théorèmes qui permettent de réduire l'étude des suites dénombrables de variables aléatoires les plus générales au cas où μ est la mesure de Lebesgue dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$. Dans le cas des familles indénombrables de variables aléatoires, une telle réduction n'est pas possible en général.

28. VI. 1946. Hartman S. *Remarques sur les ensembles et les fonctions indépendantes.*

L'auteur considère, parmi les autres, le problème suivant: M. Steinhaus appelle des fonctions réelles $f_1(x)$, $f_2(x)$ mesurables (L) dans l'intervalle (0, 1) *stochastiquement indépendantes*, si

$$(1)\qquad |f_1^{-1}(I_1)\cdot f_2^{-1}(I_2)|=|f_1^{-1}(I_1)|\cdot|f_2^{-1}(I_2)|$$

pour chaque paire d'intervalles I_1. I_2 situés sur l'axe y. M. Kolmogoroff

se sert d'une définition un peu différente, à savoir il exige que l'égalité (1) reste vraie pour des ensembles arbitraires I_1, I_2 pourvu que leurs contre-images soient mesurables (L).

L'auteur prouve que l'indépendance au sens de M. Steinhaus entraîne celle au sens de M. Kolmogoroff (la réciproque est évidente). Ce théorème est valable aussi dans le cas d'un nombre quelconque de fonctions indépendantes.

La démonstration fournit encore le théorème suivant: Soit $f(x)$ une fonction mesurable (L) définie dans l'intervalle $(0,1)$ et soit $E \subset (0,1)$ le contre-image mesurable (L) d'un ensemble quelconque situé sur l'axe y (c. à d. $f^{-1}f(E) = E$). Il existe alors un ensemble K de classe F_σ situé sur l'axe y et un ensemble $N \subset (0,1)$ de mesure nulle, tels que $E = f^{-1}(K) + N$.

SECTION DE VARSOVIE

Il est impossible de reconstruire les comptes-rendus des séances qui ont eu lieu entre le 1. I. 1939 et le 31. VIII. 1939. Entre le 1. IX. 1939 et le 1. VII. 1945 l'activité de la Section était suspendue.

13. VII. 1945. Waraszkiewicz Z. *Sur les fonctions définies par les équations fonctionnelles*:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2f(x)\cdot f(y)}{f(x)+f(y)} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

où $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

L'auteur démontre que la fonction homographique $f(x) = \frac{a}{b+x}$ (a, b constantes) présente la seule solution dérivable de la première équation. La seconde équation n'admet en dehors du cas $\lambda = 1/2$ aucune solution dérivable. Les solutions continues de cette équation présentent pour $\lambda \neq 1/2$ des exemples très simples des fonctions qui n'ont pas de dérivées.

Waraszkiewicz Z. *Sur les courbes apparentées avec l'arc simple.*

Un continu s'appelle apparenté avec l'arc simple lorsqu'il se laisse pour tout $\varepsilon > 0$ ε-déformer en un arc simple. L'auteur présente la théorie des *pointes* de ces continus, la pointe d'un continu C apparenté avec l'arc simple étant un tel point $x \in C$ pour lequel il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une ε-déformation de C en un arc simple qui transforme x en une extrémité de cet arc. La conséquence importante de cette théorie est la caractérisation intrinsèque de l'arc simple (dans le plan) comme le seul continu homéomorphe avec chacun de ses sous-continus. (Cette caractérisation présente la solution d'un problème de Z. Janiszewski).

Waraszkiewicz Z. *Homogeneous systems and almost periodicity.*

The author considers in a metrical and compact space S continuous motion which can be represented by a steady flow of fluid. To each point x of S the stream line of the motion passing through x shall be denoted by $L(x)$. This dynamical system is said homogeneous, if to each couple x,y of points of S there exists such automorph transformation of this space which carries x in y and conserves the motion i. e. transforms each $L(x')$ on another $L(x'')$. In case when S is the space of a compact, commutative group the homogeneity is equivalent to the almost periodicity of the motion in the sense of H. Bohr. In particular the homogeneous systems are in this case metrical transitive in the sense of G. Birkhoff which is not generally true when S is not a group manifold.

Waraszkiewicz Z. *La presque-périodicité et la loi des grands nombres.*

$c=\{a_n\}$ étant une suite composée des nombres 0 et 1 qui converge en moyenne vers p, c. à d., telle que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=p,$$

alors pour tout $\varepsilon>0$ il existe une suite périodique c^* composée également de 0 et 1 et convergeant vers un nombre p^* tel que $|p-p^*|<\varepsilon$. En se basant sur cette remarque l'auteur fait correspondre à chaque suite des épreuves répétées dont est soumis un événement E une fonction presque-périodique. La connaissance des presque-périodes de cette fonction permet de calculer la précision avec laquelle la fréquence de n épreuves répresente la probabilité de l'événement E.

21. IX. 1945. Marczewski E. *Isomorphie des relations et homéomorphie d'espaces.*

Remarques mathématiques à propos de la conférence de M. St. Kulczyński: *O założeniach jakie leżą u podstaw morfologii porównawczej* (Sur les hypothèses qui sont à la base de la morphologie comparée, en polonais, Rocznik Polskiej Akademii Umiejętności, Kraków 1945).

Marczewski E. *Sur l'extension de la mesure.*

Une simple démonstration du théorème bien connu sur l'extension d'une mesure abstraite.

19. X. 1945. Waraszkiewicz Z. *Transitive motions in group manifolds and definition of probability.*

The author examines in the manifold M of a commutative, compact group a continuous and transitive motion, i. e. such motion each path of which is dense in M, and proves that it is almost periodic, thus in parti-

cular metrical transitive in the sense of G. Birkhoff. The proof of this theorem is based upon the fact of the existence of a surface of section of the motion, i. e. such hypersurface of M that each stream line cuts it within sufficiently large fixed time intervall and always in the same sense. The author makes an application of this result in the problem of the definition of equiprobable cases. When the probability of a phenomenon E is to be defined, then we must introduce a measure in the space S of all possible cases and, $S(E)$ denoting the set of cases favourable to E, we obtain the probability p dividing the measure of $S(E)$ by that of S. Let us admit that this definition of probability is *correct*, if, $f(x)$ being the characteristic function of $S(E)$, to each automorph function $\varphi(x)$ of S such that the sequence $\varphi(x)$, $\varphi_2(x)=\varphi(\varphi(x))$, $\varphi_3(x)=\varphi(\varphi(\varphi(x)))$,... is dense in S for each $x \in S$, the existence of the limit

$$l(E)=\lim_{n=\infty}\frac{f(\varphi(x))+f(\varphi_2(x))+\ldots+f(\varphi_n(x))}{n}$$

involves the equality $l(E)=p$.

The author proves that the definition of probability of E is correct, when S is the manifold of a commutative and compact group. It seems to him that the fact that S is the manifold of a transitive group characterises the correctness of the probability definition of each phenomenon E.

Waraszkiewicz Z. *Sur l'équivalence de deux carrés.*

Deux figures sont dites équivalentes par décomposition finie lorsqu'il existe une décomposition de chaque figure en un nombre égal des ensembles disjoints, deux à deux égaux. Dans cette communication l'auteur donne une démonstration élémentaire du fait que deux carrés de dimensions inégales ne sont pas équivalentes. (Le fait est une conséquence de l'existence de la mesure additive pour tous les ensembles plans, cependant la définition de cette mesure exige l'emploi de l'axiome du choix). Dans la démonstration l'auteur opère au lieu des mesures d'ensembles (qui peuvent ne pas être mesurables) des nombres des points (situés dans un ensemble) de certaines mailles regulières qui couvrent le plan.

26. X. 1945. Zarankiewicz K. *Sur une relation entre les ordres des points de ramification dans les dendrites.*

L'auteur a demontré la formule

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = 2(n-1)+e$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_n$ désignent les ordres des points de ramification, n leur nombre et e le nombre des points d'arrêt (ramification d'ordre 1). Quelques conséquences furent aussi discutées.

30. XI. 1945. Sierpiński W. *Sur la trisection d'un angle à l'aide d'une règle, d'un compas et d'une parabole* Ann. Soc. Pol. de Math., vol. XVIII, p. 164].

21. XII. 1945. Mostowski A. *Sur le théorème de M. Gödel* [Kwartalnik Filozoficzny, vol. 16 (1946), pp. 223—277].

4. I. 1946. Milicer-Grużewska H. *Sur le coefficient de corrélation à posteriori des variables aléatoires équivalentes.*

Une généralisation des résultats de A. Khinchine (*Sur un cas de corrélation à posteriori*, Mat. Sbornik, vol. 12 (1943). Le mémoire sera publié dans les C. R. de la Soc. des Sci. et des Lettres de Varsovie.

18. I. 1946. Milicer-Grużewska H. *Sur la loi limite des variables équivalentes de corrélation non nul* [Voir le compte rendu du séance du 10. V. 1946].

25. I. 1946. Mostowski A. *Les constructions géométriques du 3-ème et 4-ème dégré.*

L'auteur donne une démonstration des théorèmes suivants dus à J. Pierpont (Bull. of the Amer. Math. Soc., vol. 2 (1895), pp. 77—86):

Pour qu'un n-gone régulier puisse être construit à l'aide d'une règle, d'un compas et d'une conique quelconque (ne se réduisant pas à un cercle), il faut et il suffit que n soit égal à $2^k \cdot 3^l \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$ où $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sont des nombres premiers de la forme $2^r \cdot 3^s + 1$ différents l'un de l'autre.

Pour qu'un angle quelconque se laisse diviser en n parties égales à l'aide des mêmes instruments il faut et il suffit que n soit de la forme $2^r \cdot 3^s$.

8. II. 1946. Sierpiński W. *Critique d'une solution apparente du problème de Souslin.*

15. II. 1946. Sierpiński W. *Un théorème sur les espaces métriques.*

Sierpiński W. *Concernant les travaux de M. Ribeiro.*

Sierpiński W. *Sur un résultat de M. Finsler.*

Nikliborc W. *Sur le problème des trois corps.*

Un résumé de ce travail vient d'être publié dans les Acta Astronomica. Le mémoire contenant les démonstrations detaillées sera publié dans les Prace matematyczno-fizyczne.

1. III. 1946. Mostowski A. *Sur quelques analogies entre la théorie des ensembles projectifs et la théorie des ensembles λ-définissables.*

Un ensemble A de k-tuples des entiers positifs est dit *λ-définissable* si sa fonction caractéristique est λ-définissable (ou récursive au sens de

Gödel-Herbrand; voir p. ex. S. C. Kleene, Math. Annalen, vol. 112, 1936, pp. 630—636). Soit $P_0^{(k)} = Q_0^{(k)} =$ la classe de tous ces ensembles et soit $Q_{n+1}^{(k)} = C(P_n^{(k)}) =$ la classe des ensembles complémentaires aux ensembles de $P_n^{(k)}$ et $P_{(k)}^{n+1} = P(Q_n^{(k+1)}) =$ la classe des projections des ensembles de $Q_n^{(k+1)}$. Il subsiste une analogie touchante entre les classes $P_n^{(k)}$ et $Q_n^{(k)}$ d'une part et les classes des ensembles projectifs k-dimensionels P_n et C_n d'autre part. En particulier la théorie des ensembles universels se laisse développer pour les classes $P_n^{(k)}$ et $Q_n^{(k)}$. Le „théorème de Souslin" $P_1^{(k)} \cdot Q_1^{(k)} = P_0^{(k)}$ est aussi valable. L'existence d'un ensemble de $P_1^{(1)}$ qui n'appartient pas au $P_0^{(1)}$ donne tout de suite le théorème de M. Gödel sur l'existence des propositions arithmétiques vraies mais non démontrables.

Les démonstrations détaillées seront publiées dans le vol. 34 des Fundamenta Mathematicae.

8. III. 1946. Milicer-Grużewska: *Sur la loi limite de variables équivalentes de corrélation nul* [Voir le compte-rendu du séance du 10. V. 1946].

15. III. 1946. Zarankiewicz K. *Sur les contre-images des fonctions continues.*

12. IV. 1946. Mazur S. *Sur la structure des fonctionelles linéaires dans certains espaces (L).*

Soit T un ensemble abstrait et $\mathfrak{A}$ un espace (L) formé des toutes fonctions réelles $x(t)$, $t \in T$, la convergeance $x_n \to x$ étant définie par la formule $x_n(t) \to x(t)$ pour tout $t \in T$.

Une fonctionelle linéaire $F(x)$ définie dans $\mathfrak{A}$ s'appelle *normale*, si l'on a pour tout $x \in \mathfrak{A}$

$$F(x) = a_1 x(t_1) + a_2 x(t_2) + \ldots + a_k x(t_k),$$

les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ et les éléments $t_1, t_2, \ldots, t_k$ étant fixes.

Théorème: *Pour que chaque fonctionelle linéaire $F(x)$ dans $\mathfrak{A}$ soit normale, il faut et il suffit qu'il n'existe aucune mesure $m(Z)$ complètement additive ne s'annulant pas identiquement, ne prenant que des valeurs 0 et 1, s'annulant pour des ensembles formés d'un seul élément et définie pour chaque sous-ensemble Z de T.*

Soit maintenant T un espace métrique et $\mathfrak{B}$ un éspace linéaire (L) formé des fonctions $x \in \mathfrak{A}$ continues. Le théorème précédent reste vrai si l'on y remplace $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$.

La démonstration détaillée paraitra dans le vol. 34 des Fundamenta Mathematicae.

4. V. 1946. Leja F. *Sur les polynomes de Tschebycheff et la fonction de Green* [Ann. Soc. Pol. de Math., vol. XIX, pp. 1—6].

Wrona W. ***Sur les conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'un espace soit einsteinien, conforme-euclidien ou de courbure constante.***

Appellons *courbure scalaire d'une m-direction* régulière en un point de l'espace riemannien V_n à n dimensions la courbure scalaire d'un sous espace V_m, géodesique en ce point et y tangent à la m-direction en question. Cette notion est une généralisation de la mesure riemannienne de la courbure, qui est la courbure scalaire d'une bi-direction.

On peut démontrer les théorèmes suivants:

I. La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace V_{2m} soit un espace einsteinien est que dans tous les points deux m-directions régulières arbitraires perpendiculaires entre elles aient les mêmes courbures scalaires.

Une généralisation de ce théorème fut démontrée par M. T. Ważewski.

II. La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace riemannien V_{2m} soit pour $m \geqslant 2$ conforme-euclidien est que dans chaque point la somme des mesures riemanniennes de courbure du système de m bi-directions régulières mutuellement perpendiculaires ne dépende pas du choix spécial du système.

III. La condition nécessaire et suffisante pour que l'éspace V_{2m} ($m \geqslant 2$) soit conforme-euclidien est que la somme des courbes scalaires de deux m-directions arbitraires régulières et mutuellement perpendiculaires soit indépendante dans chaque point du choix de ces deux m-directions.

J. Haantjes a généralisé les théorèmes II et III.

M. F. Schur a démontré le théorème suivant bien connu:

Si la mesure riemannienne de la courbure en chaque point de l'espace V_n ne dépend pas du choix spécial de la bi-direction, elle est constante dans V_n.

On peut généraliser ce théorème comme il suit:

Si la courbure scalaire d'une m-direction de l'espace V_n, ou n est un nombre fixe remplissant la condition $1 < m < n$, ne dépend pas du choix spécial de cette m-direction elle est alors constante dans V_n.

Il résulte des hypothèses de ce théorème que, si $m = n - 1$, l'espace V_n est de courbure constante; si $m < n - 1$, l'espace V_n est un espace einsteinien.

Une interessante démonstration de la seconde partie du dernier théorème fut donnée par M. S. Gołąb. L'interpretation des ces théorèmes dans le cas $n = 4$ est particulièrement interessante.

4. V. 1946. Kuratowski K. ***Homotopie et fonctions analytiques.***

L'auteur présente des extensious des théorèmes classiques de la théorie des fonctions analytiques (de Weierstrass, Runge, Rouché) aux fonctions continues qui ne s'annulent en aucun point.

Pour un exposé détaillé, voir Fund. Math. 33, p. 316—367, ains qu'une note qui paraîtra dans le vol. 34.

Marczewski E. ***Mesures dans les corps de Boole.***

Chaque fonction additive $\mu(E)$ non négative, définie pour chaque E appartenant à un corps de Boole K, s'appelle *mesure* sur K.

μ étant une mesure sur K, et N l'idéal de tous les $E \epsilon K$ tels que $\mu(E)=0$, la mesure μ induit dans le corps-facteur K/N une mesure nouvelle qui sera désignée par μ_0: on pose notamment $\mu_0(Z)=\mu(E)$ pour $E \epsilon Z \epsilon K/N$. Évidemment, si μ est une mesure dénombrablement additive, μ_0 l'est également.

On démontre facilement le

Théorème 1. *Soient K un corps de Boole dénombrablement additif et J un idéal dénombrablement additif dans K tel que chaque mesure dénombrablement additive sur K et s'annulant sur J, s'annulle identiquement. Thèse: Chaque mesure dénombrablement additive sur K/J s'annulle identiquement.*

Par conséquent, *il existe des corps de Boole dénombrablement additifs sur lesquels il n'y a aucune mesure dénombrablement additive qui ne s'annulle pas identiquement*, p. ex. le corps K/J, où K est le corps de tous les sous-ensembles d'un ensemble X de puissance aleph — un et J — la classe des sous-ensembles au plus dénombrables de X[1]).

On dit que les mesures μ et μ' sur les corps de Boole K et K' sont isomorphes lorsque les corps K et K' sont isomorphes et lorsqu'on a $\mu(E)=\mu'(E')$ pour chaque couple $E \epsilon K$, $E' \epsilon K'$ d'éléments correspondant.

K étant un corps de Boole dénombrablement additif et $E \epsilon K$ appelons *décomposition dyadique* de E chaque système $\{E_{i_1,i_2,\dots,i_n}\}$ où $(i_j=0,1;$ $E_{i_1,i_2,\dots,i_n} \epsilon K)$ tel que

$$E=E_0+E_1, \quad E_{i_1,i_2,\dots,i_n}=E_{i_1,i_2,\dots,i_n,0}+E_{i_1,i_2,\dots,i_n,1}.$$

Posons encore

$$E_{i_1,i_2,\dots}=E_{i_1}\cdot E_{i_1,i_2}\cdot E_{i_1,i_2,i_3}\cdot\dots$$

Nous appelons $E_{i_1,i_2,i_3,\dots}$ *constituant* de la décomposition considérée.

On voit immédiatement que chaque corps dénombrablement additif K d'ensembles satisfait à la condition (W) suivante:

(W) Pour chaque décomposition dyadique de chaque $0 \neq E \epsilon K$ il existe un constituant non nul.

D'autre part, en désignant par L la classe des ensembles mesurables (L) contenus dans l'intervalle I et par N la classe des ensembles de mesure nulle contenus dans I, on voit aisément que le corps-facteur $K=L/N$ ne satisfait pas à la condition (W). (C'est M. A. Mostowski qui m'a posé le problème de trouver une proposition qui soit juste pour chaque corps dénombrablement additif d'ensembles et qui tombe en défaut pour certains corps dénombrablement additifs de Boole). Par conséquent, en désignant par $m(E)$ la mesure de Lebesgue sur L et, en considérant la mesure $m_0(E)$ sur $K=L/N$, nous obtenons le

---

[1]) Voir S. Ulam, Fund. Math. 16 (1930), pp. 140—150.

Théorème 2[1]. *Il existe une mesure dénombrablement additive sur un corps de Boole dénombrablement additif qui n'est pas isomorphe à aucune mesure dénombrablement additive sur un corps dénombrablement additif d'ensembles.*

10. V. 1946. Milicer-Grużewska H. ***Sur la loi limite des variables aléatoires équivalentes et certaines généralisations.***

Si les variables aléatoires $x_1, x_2, \ldots$ sont équivalentes [2] on peut écrire

$$E\left[x_{i_1}^{\nu_1} x_{i_2}^{\nu_2} \ldots x_{i_l}^{\nu_l}\right] = M_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_l},$$

les indices $i_1, i_2, \ldots, i_l$ étant supposés différents l'un de l'autre et les exposants $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$ étant des entiers positifs quelconques $(l = 1, 2, 3, \ldots)$.

A. Supposons que les conditions suivantes soient vérifées:

I. $E(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots; \quad M_{1,1} \neq 0,$

II. $M_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_l} \leqslant C(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_l)!\, M_2^{(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_l):2} =$

$$= C(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_l)!\, \sigma^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_l},$$

III. Les densités élémentaires $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ existent et sont intégrables $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Théorème I. *Si les variables aléatoires $x_1, x_2, \ldots$ sont équivalentes et accomplissent les conditions I, II et III, alors les conditions nécessaires et suffisantes pour que la loi limite de la somme x de ces variables divisée par sa dispérsion soit celle de Gauss sont*

$$M^{2p-1} = M_{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2p-1 \text{ fois}}} = 0,$$

$$M^{(2p)} = M_{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2p \text{ fois}}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)\, M_{1,1}^{p}$$

$(p = 0, 1, 2, \ldots)$.

B. Si les variables aléatoires ne sont pas équivalentes nous posons

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i^2) = \bar{\sigma}_n^2$$

$$\frac{1}{C_n^l}\sum E(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_l}) = M_n^{(l)}$$

où la sommation s'étend aux systèmes $i_1, i_2, \ldots, i_l$ d'indices admettant des valeurs $1, 2, \ldots, n$ et satisfaisant aux inégalités $i_1 < i_2 < \ldots < i_l$.

---

[1]) Cf. F. Wecken, Math. Ztschr. 45 (1939), pp. 377—404, Satz 3, p. 380.

[2]) B de Finetti, *Sui numeri equivalenti*, R. d. Reale Acc. Naz. d. Lincei, 1933.

Supposons que

$$\text{I}'.\ E(x_l)=0;\quad \lim\left[\frac{M_n^{(2)}}{\sigma_n^2}\right]^2=\beta^2>0;$$

II'. $|E(x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\dots x_n^{\nu_n})|\leqslant C(\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n)!\,\sigma_n^{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n}$ (C = const., $n=1,2,\dots,\ \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n=l=0,1,2,\dots,\ \nu_1,\nu_2,\dots\nu_n$, entiers nonnégatifs);

III'. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{l!}[M_n^{(l)}:(M_n^{(2)})^{l/2}]=\mu^{(l)}:(\mu^{(2)})^{l/2}$ uniformément par rapport à $l=1,2,\dots,n$.

Théorème II. *Si les variables aléatoires accomplissent les conditions* III, I', II', III', *alors les conditions nécessaires et suffisantes pour que la loi limite de la somme de ces variables, divisée par sa dispersion soit celle de Gauss sont:*

$$\mu^{(2p-1)}=0,$$

$$\mu^{(2)}=\frac{1\cdot 3\dots(2p-1)}{1\cdot 2\dots 2p}(\mu^2)^p$$

pour $p=1,2,\dots$

C. Supposons que les variables équivalentes accomplissent les conditions I'' et II'' suivantes:

I''. leurs densités $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ sont intégrables et symétriques par rapport à toutes les variables $x_1,x_2,\dots,x_n$ (elles sont donc quadratiquement indépendentes).

II''. $|M_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}|\leqslant C\frac{(2l)!}{2^l l!}\sigma^l$ où $C=$const. et $\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n=l$.

Théorème III. *Si les variables équivalentes* $x_1,x_2,\dots$ *accomplissent les conditions* I'' *et* II'', *alors les conditions nécessaires et suffisantes pour que la loi limite de la somme de ces variables divisée par sa dispérsion soit Gaussienne sont:*

$$M_{\underbrace{2,2,\dots,2}_{m\text{ fois}}}=\sigma^{2m},\quad m=1,2,\dots$$

Dans le cas général on pose

$$\frac{1}{C_n^m}\sum E(x_{\nu_1}^2\dots x_{\nu_m}^2)=\sigma_{m,n}^2$$

où la sommation s'étend sur tous les systèmes $\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m$ des indices qui prennent des valeurs $1,2,\dots,n$ et satisfont aux inégalités $\nu_1<\nu_2<\dots<\nu_m$ et où $m=1,2,\dots,[n/2]$.

Supposons que

I'''. $|E(x_1^{\nu_1}\dots x_n^{\nu_n})|\leqslant C\frac{(2l)!}{2^l l!}\sigma_{1,n}^{2l}$

où $\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n=2l$ et $\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n=0,1,2,\dots,n$;

II'''. Les densités des variables $x_1,x_2,\dots$: $f(x_1,\dots,x_n)$ sont intégrables et symétriques par rapport à chaque de ces variables ($n=1,2,\dots$);

III'''. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sigma^2_{m,n}}{\sigma^{2m}_{1,n}}=\frac{\sigma^2_m}{(\sigma^2_1)^m}$ existe uniformément par rapport à $m=1,2,\ldots,[n/2]$, $n=1,2,\ldots$

Théorème IV. *Si les variables aléatoires accomplissent les conditions* I''', II''', III''', *alors les conditions nécessaires et suffisantes pour què la loi limite de leur somme divisée par sa dispersion soit Gausienne sont*

$$\sigma^2_m=(\sigma^2_1)^m,\quad m=1,2,\ldots$$

Sikorski R. ***Sur l'isomorphisme des corps de Boole avec des corps d'ensembles.***

M. M. H. Stone a démontré que chaque corps de Boole est isomorphe avec un corps additif (au sens restreint) d'ensembles. Par contre, un corps de Boole additif au sens dénombrable (c. à d. contenant une „somme" de chaque suite dénombrable de ses éléments) n'est, en général, isomorphe avec aucun corps d'ensembles additif au sens dénombrable (c. à d. avec aucun système borelien d'ensembles, cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, p. 84).

L'auteur démontre le théorème suivant:

Pour qu'un corps de Boole $\mathfrak{A}$ additif au sens dénombrable soit isomorphe avec un corps additif au sens dénombrable d'ensembles, il faut et il suffit qu'il existe pour chaque élément A de $\mathfrak{A}$ $(A\neq 0)$ une mesure bivalente m telle que $m(A)=1$.

(Mesure bivalente dans $\mathfrak{A}$ est une fonction univoque qui fait correspondre à chaque $X\in\mathfrak{A}$ un des deux nombres 0, 1 et qui est additive au sens dénombrable, c. à d. satisfait l'égalité $m\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(A_i)$ pour chaque suite $\{A_i\}$ d'éléments disjoints de $\mathfrak{A}$).

Définition. Convenons de dire qu'un corps de Boole $\mathfrak{A}$ additif au sens dénombrable, satisfait la condition (M) si pour chaque $A\in\mathfrak{A}$ $(A\neq 0)$ et pour chaque système dyadique $\{A_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\}$ (où $n=1,2,\ldots$, $i_n=0$ ou bien $i_n=1$) d'éléments de $\mathfrak{A}$ tel que

$$A=A_0+A_1,\quad A_{i_1,i_2,\ldots,i_n}=A_{i_1,\ldots,i_n,0}+A_{i_1,\ldots,i_n,1}$$

il existe une suite infinie $\{j_n\}$ des nombres 0 et 1 telle que $\prod\limits_{n=1}^{\infty}A_{j_1\ldots j_n}\neq 0$.

M. Marczewski a remarqué que la condition (M) est nécessaire pour qu'un corps $\mathfrak{A}$ soit isomorphe avec un corps additif au sens dénombrable d'ensembles et a posé le problème si cette condition est en même temps suffisante (voir le compte-rendu du séance du 4. V. 1946, séction de Varsovie). L'auteur démontre à l'aide d'un exemple convenable que la condition (M) est en général insuffisante.

14. VI. 1946. Nikliborc W. ***Sur la symbolique différentielle et certains opérateurs différentiels*** **[A paraître dans les Prace matematyczno-fizyczne].**

21. VI. 1946. Alexiewicz A. *On Denjoy integration of abstract functions.*

The theory of Lebesgue integration of abstract functions (i.e. functions of a real variable to a Banach space) has been developed by several authors (Bochner, Birkhoff, Dunford, Pettis, Gelfand). The author presents a theory of Denjoy integration and introduces a strong and weak process of integration. Both, descriptive and constructive definitions are considered, and relations with Lebesgue integration are discussed. Relations between strong or weak derivatives and Denjoy integration are obtained. In connection with this is shown that if an abstract function is weakly derivable in a set, then the strong derivative exists almost everywhere in this set.

Marczewski E. *Mesures dans les corps indépendents et dans les produits cartésiens.*

Définitions. Soit $\{K_t\}$ (où t parcourt un ensemble fixé T d'indices arbitraires) une famille de corps, composés de sous-ensembles d'un ensemble fixé X. Les corps K_t s'appellent *indépendants* [*dénombrablement indépendants*] lorsqu'on a

$$\prod_j E_j \neq 0$$

pour chaque suite finie [au plus dénombrable] d'ensembles E_j tels que

(*) $$0 \neq E_j \in K_{t_j} \quad \text{où} \quad t_r \neq t_s \quad \text{pour} \quad r \neq s.$$

Chaque fonction non négative et additive d'ensemble, définie dans un corps d'ensembles, s'appelle mesure. Dans le cas où $m(E)$ est une mesure normée (c. à d. telle que $m(X) = 1$) sur un corps K contenant tous les corps K_t, on appelle ces corps stochastiquement indépendants par rapport à la mesure $m(E)$, lorsqu'on a

$$m(E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n) = m(E_1) \cdot m(E_2) \cdot \ldots \cdot m(E_n)$$

pour chaque suite d'ensembles E_j satisfaisant aux conditions (*).

Théorème I. *Soit $m_t(E)$ (pour chaque $t \in T$) une mesure normée sur un corps K_t de sous-ensembles de X. Si les corps K_t sont indépendants, il existe une mesure $m(E)$ sur le plus petit corps contenant tous les corps K_t et telle que 1° $m_t(E) = m(E)$ pour $E \in K_t$, 2° les corps K_t sont stochastiquement indépendants par rapport à la mesure $m(E)$.*

L'auteur a démontré ce théorème au printemps de 1939. Le problème si un théorème analogue subsiste pour l'additivité dénombrable a été résolu en octobre 1940 par Stefan Banach qui a démontré ce

Théorème II (de S. Banach). *Soit $m_t(E)$ (pour chaque $t \in T$) une mesure normée dénombrablement additive sur un corps dénombrablement additif K_t de sous-ensembles de X. Si les corps K_t sont dénombrablement indépendants, il existe une mesure dénombrablement additive $m(E)$ sur le petit corps dénombrablement additif K contenant tous les corps K_t et telle*

que 1° $m_t(E) = m(E)$ pour $E \epsilon K_t$. 2° les corps K_t sont stochastiquement indépendants par rapport à $m(E)$.

Une démonstration différente du théorème II est due à M. Stanisław Saks. Les démonstrations de MM. Banach et Saks, rédigées d'après les mémoires posthumes seront publiées dans les Fundamenta Mathematicae.

La condition de l'indépendance dans l'énoncé du théorème I peut être remplacée par la condition plus faible de la *presque-indépendance*. Pour définir cette condition il suffit de modifier la définition de l'indépendance, en remplaçant dant (*) la relation: $E_j \neq 0$ par $m_{t_j}(E_j) \neq 0$. Le problème de la généralisation analogue du théorème 2 reste encore ouvert, même dans le cas de deux corps et mesures données.

Les théorèmes I et II trouvent beaucoup d'applications, en particulier ils entraînent facilement 1° les théorèmes connus sur les mesures dans les produits cartésiens [1]), 2° les théorèmes sur les mesures dans les classes d'ensembles indépendants [2]), 3° la réponse à une question posée par M. J. Schauder en connexion avec la théorie des quanta. Le théorème I généralisé permet de répondre (par negative) à un problème de MM. Z. Łomnicki et S. Ulam (l. c., p. 262).

CHRONIQUE ET PUBLICATIONS

LES MATHÉMATIQUES DANS LES ÉCOLES SUPÉRIEURES POLONAISES

Il existe en Pologne 7 universités et 5 écoles techniques supérieures avec 35 chaires des mathématiques, mécanique rationelle, logique mathématique et philosophie de la mathématique. A savoir (les chaires vacantes ne sont pas énumerées):

L'Université de Cracovie. Les professeurs des mathématiques: Dr Franciszek Leja, Dr Tadeusz Ważewski. Le professeur de la mécanique rationelle: Dr Jan Blaton. Le professeur de la logique: Dr Zygmunt Zawirski.

L'Université de Lublin. Les professeurs des mathématiques: Dr Mieczysław Biernacki, Dr Jan Mikusiński. Suppléant du professeur de la logique: Dr Jerzy Słupecki.

L'Université de Łódź. Le professeur des mathématiques: Dr Stanisław Mazur. Le professeur de la mécanique rationelle: Dr M. Wiśniewski.

---

[1]) Cf. p. ex. Z. Łomnicki et S. Ulam, Fund. Math. 23 (1934), pp. 237—278, en particulier p. 245 et 252.

[2]) E. Szpilrajn-Marczewski, C. R. 207 (1938), p. 768—770. (Les termes et notations utilisées dans la note citée de C. R. diffèrent de ceux qui sont employés ici).

L'Université de Poznań. Les professeurs des mathématiques: Dr Władysław Orlicz, Dr Zdzisław Krygowski.

L'Université de Toruń. Le professeur des mathématiques: Dr Juliusz Rudnicki. Le professeur de la logique et des mathématiques: Dr Stanisław Jaśkowski.

L'Université de Varsovie. Les professeurs des mathématiques: Dr Wacław Sierpiński, Dr Kazimierz Kuratowski, Dr Karol Borsuk. Suppléant du professeur des mathématiques: Dr Władysław Nikliborc. Le professeur de la mécanique rationelle: Dr Wojciech Rubinowicz. Suppléant du professeur de la philosophie de la mathématique: Dr Andrzej Mostowski.

L'Université et l'École Polytechnique de Wrocław. Les professeurs des mathématiques: Dr Hugo Steinhaus, Dr Władysław Ślebodziński, Dr Bronisław Knaster, Dr Edward Marczewski. Suppléant du professeur de la mécanique rationelle: Dr Władysław Ślebodziński.

L'Académie des Mines avec les Facultés Polytechniques à Cracovie. Professeurs des mathématiques: Dr Otton Nikodym, Dr Stanisław Gołąb. Suppléants des professeurs des mathématiques: Dr Adam Bielecki, Dr Włodzimierz Wrona.

L'École Polytechnique de Gdańsk. Le professeur des mathématiques: Dr Stanisław Turski. Le professeur de la mécanique rationelle: Dr Maksymilian Huber.

L'École Polytechnique de Łódź. Le professeur des mathématiques: Dr Edward Otto.

L'École Polytechnique de la Silésie (à Gliwice, Haute Silésie). Les professeurs des mathématiques: Dr Julian Bonder, Dr phil. Stanisław Kaliński.

L'École Polytechnique de Varsovie. Les professeurs des mathématiques: Dr Stefan Straszewicz, Dr Władysław Nikliborc, Dr Witold Pogorzelski. Le professeur de la mécanique rationelle: Dr Kazimierz Zarankiewicz.

HABILITATIONS

A. Habilitations de mathématique:

L'Université de Lublin. Dr Jan Mikusiński. Dissertation: *Hyper-nombres* (à paraître dans les Annales del U'niversité de Lublin).

L'Université de Varsovie. Dr Edward Marczewski. Dissertation: *Sur les ensembles et les fonctions absolument mesurables.*

L'école polytechnique de Varsovie. Dr Edward Otto. Dissertation: *Sur une généralisation du théorème de Salmon.*

B. Habilitations de la logique mathématique:

L'Université de Cracovie. Dr Stanisław Jaśkowski. Dissertation: *Sur certains groupes formés de classes d'ensembles et leurs applications aux définitions des nombres.*

Dr Andrzej Mostowski. Dissertation: *L'axiome du choix pour les ensembles finis* (Fundamenta Mathematicae, vol. 33 (1945), pp. 137—168).

Dr Jerzy Słupecki. Dissertation: *Recherches sur la syllogistique d'Aristote.*

THÈSES DE DOCTORAT

L'Université de Cracovie:

Jan Mikusiński: *Sur le problème d'interpolation dans la théorie des équations differentielles linéaires.*

Jacek Szarski: *Sur un problème de caractère intégral relatif à l'équation:* $\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ *définie dans le plan tout entier.*

Andrzej Turowicz: *Sur les fonctionelles continues et multiplicatives.*

Włodzimierz Wrona: *Sur les conditions nécessaires et suffisantes qui caractèrisent les espaces einsteiniens, conforme-euclidiens et les espaces à courbure constante.*

Zygmunt Zahorski: *Sur les points singuliers des fonctions de classe* C^∞ (A paraître dans les Fundamenta Mathematicae, vol. 34).

L'Université de Poznań:

Andrzej Alexiewicz: *Sur les suites d'opérations.*

MATHÈMATICIENS POLONAIS À L'ÉTRANGER ET MATHÉMATICIENS ÉTRANGERS EN POLOGNE

Prof. Dr Wacław Sierpiński, invité par la Société Mathématique de Suisse a prononcé au mois de mai et juin 1946 des discours dans les universités de Zürich, Bern, Genève, Bâle, Lausanne, Freiburg et Neuchâtel.

Prof. Dr T. Banachiewicz et Prof. Dr Józef Witkowski ont pris part dans le Congrès des astronomes à Copenhague en avril 1946.

Prof. G. Bouligand a passé quelques jours à Cracovie et à Varsovie en été de 1945.

Dr Gustave Choquet, membre d'Institut Français à Cracovie a donné des conférences à Varsovie le 7. VI. 1946 et à Cracovie le 28. V. 1946. M. Choquet passe l'année 1946/47 à Cracovie en collaborant avec les mathématiciens de Cracovie.

LIVRES ET PÉRIODIQUES PARUS

Annales de la Société Polonaise de Mathématique, vol. XVIII, (Kraków 1945, Instytut Matematyczny U. J., ul. św. Jana 22, p. V+170+2). Contient 12 travaux de 11 auteurs.

Fundamenta Mathematicae, vol. 33 (Warszawa 1945, Seminarium Matematyczne Uniwersytetu, ul. Hoża 69, p. XII+367). Contient 34 travaux de 22 auteurs.

Dr Stanisława Nikodymowa: *Wybrane zadania z analizy matematycznej*, 2-e édition (Kraków 1946, Księgarnia lingwistyczna, ul. Krupnicza 26, p. 277).

Dr Otton Nikodym: *Spójrzmy w głębiny myśli*. Cykl wykładów popularnych z dziedziny nauk ścisłych (Kraków 1946, Księgarnia lingwistyczna, ul. Krupnicza 26, p. 110).

Dr Franciszek Leja: *Geometria Analityczna* (litographié, Kraków 1946, Kółko Matematyczno-Fizyczne U. U. J.).

Dr Stanisław Gołąb: *Matematyka dla przyrodników* (litographié, Kraków 1945 et 1946, Koło Chemików Uniwersytetu Jagiellońskiego).

Dr Stanisław Gołąb: *Geometria Analityczna* (litographié, Kraków, 1945 et 1946, Sekcja Wydawnicza Bratniej Pomocy Studentów Akademii Górniczej w Krakowie).

Dr Stanisław Gołąb: *Równania Różniczkowe* (litographié, Kraków 1946, Sekcja Wydawnicza Bratniej Pomocy Studentów Akademii Górniczej w Krakowie).

Antoni Chromiński: *Matematyka stosowana* (litographié, Kraków 1946, Sekcja Wydawnicza Stowarzyszenia Studentów Inżynierii w Krakowie).

Problèmes

Soit E un ensemble fermé et borné des points de l'espace à 3 dimensions, $|p_1 p_2|$ la distance cartesienne des points p_1 et p_2, n un nombre naturel fixe et

$$p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(u)}$$

un système de n points de E tels que la somme

$$\sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \frac{1}{|p_i^{(n)} p_k^{(n)}|}$$

soit la plus petite.

Prouver que la suite des fonctions du point variable u

$$g_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|u\, p_k^{(n)}|}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

converge partout en dehors de E (ou montrer que cette proposition est fausse).

Problème de M. F. Leja

Table des matières



Les publications de la Société Polonaise de Mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de »*Rozprawy Polskiego Towarzystwa Matematycznego*« en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922, l'organe de la Société porte le titre d'**Annales de la Société Polonaise de Mathématique**; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément (*Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego)*, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise et italienne.

Les tomes I—XIX contiennent 187 mémoires et notes des 76 auteurs suivants:

Abramowicz K., Alexiewicz A., Auerbach H., Bielecki A., Biernacki M., Bilimowitch A., Borsuk K., Bouligand G., Butlewski Z., Cartan E., Chwistek L., Cotton F., Delsarte J., Durañona y Vedla A., Flamant P., Fréchet M., Gambier B., Garcia G., Giraud G., Glass S., Godeaux L., Gołąb S., Hadamard J., Herzberg J., Hildebrandt T., Hlavatý V., Hoborski A., Janet M., Kawaguchi A., Kempisty S., Kobrzyński Z., Kołodziejczyk S., Kozakiewicz W., Krzyżański M., Labrousse A., Lainé E., Lebesgue H., Leja F., Lichtenstein L., Marcinkiewicz J., Mazurkiewicz S., Mikusiński J., Montel P., Nikliborc W., Nikodym O., Orlicz W., Perausówna I., Piccard S., Picone M., Popovici C., Rosenblatt A., Le Roux J., Rudnicki J., Ruziewicz S., Sakellariou N., Saks S., Severi F., Sieczka F., Sierpiński W., Ślebodziński W., Stamm E., Stożek W., Szarski J., Tonolo A., Tsortsis A., Turowicz A., Turski S., Urbański W., Vasseur M., Vitali G., Wajnsztejn D., Ważewski T., Weyssenhoff J., Wilkosz W., Zaremba S., Zaremba S. K., Zahorski Z.

Le prix de ces Annales par un tome est 300 zł en Pologne et 3 dollars USA pour l'étranger. Les tomes separés et la collection des tomes II—XIX est en vente à l'adresse:

Administration des Annales de la Soc. Polonaise de Mathématique, Kraków (Pologne), ul. św. Jana 22.